July 22

# ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

# AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

---

## 1911.

PHYSIKALISCH-MATHEMATISCHE CLASSE.

# ABHANDLUNGEN

DER

## KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

# AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

## JAHRGANG 1911.

PHYSIKALISCH-MATHEMATISCHE CLASSE.

MIT 21 TAFELN.

Smithsonian Institution
23118
JUL 1912
Office Library

BERLIN 1911.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

# Inhalt.

Öffentliche Sitzungen . . . . . S. VII—VIII.
Verzeichnifs der im Jahre 1911 gelesenen Abhandlungen . . . . . S. VIII—XVI.
Bericht über den Erfolg der Preisausschreibungen für 1911 und neue Preisausschreibung . . . . . S. XVII—XVIII.
Verzeichnifs der im Jahre 1911 erfolgten besonderen Geldbewilligungen aus akademischen Mitteln zur Ausführung wissenschaftlicher Unternehmungen . . . . . S. XVIII—XXI.
Verzeichnifs der im Jahre 1911 erschienenen im Auftrage oder mit Unterstützung der Akademie bearbeiteten oder herausgegebenen Werke . . . . . S. XXI—XXIV.
Veränderungen im Personalstande der Akademie im Laufe des Jahres 1911 . . . . . S. XXIV—XXVI.
Verzeichnifs der Mitglieder der Akademie am Schlusse des Jahres 1911 nebst den Verzeichnissen der Inhaber der Helmholtz- und der Leibniz-Medaille und der Beamten der Akademie . . . . . S. XXVII—XXXIV.

FISCHER: Gedächtnifsrede auf Jacobus Henricus van't Hoff . . . . Ged. Red. I. S. 1—16.

## Abhandlungen.

ENGLER und K. KRAUSE: Über den anatomischen Bau der baumartigen Cyperacee Schoenodendron Bücheri Engl. aus Kamerun. (Mit 2 Tafeln) . . . . . Abh. I. S. 1—14.

### Anhang.

### Abhandlungen nicht zur Akademie gehöriger Gelehrter.

J. PETERS: Einundzwanzigstellige Werthe der Functionen Sinus und Cosinus . . . . . Abh. I. S. 1—54.
M. NEIDING: Über die Kerne des Diencephalon bei einigen Säugethieren. (Mit 7 Tafeln) . . . . . Abh. II. S. 1—67.
R. ISENSCHMID: Zur Kenntnifs der Grofshirnrinde der Maus. (Mit 5 Tafeln) . . . . . Abh. III. S. 1—46.

P. Röthig: Zellanordnungen und Faserzüge im Vorderhirn von Siren lacertina. (Mit 6 Tafeln) . . . . . Abh. IV. S. 1–23.

K. Agadschanianz: Über die Kerne des menschlichen Kleinhirns. (Mit 1 Tafel) . . . . . Abh. V. S. 1–15.

L. Lichtenstein: Beweis des Satzes, dafs jedes hinreichend kleine, im wesentlichen stetig gekrümmte, singularitätenfreie Flächenstück auf einen Theil einer Ebene zusammenhängend und in den kleinsten Theilen ähnlich abgebildet werden kann . . . . . Abh. VI. S. 1–49.

# Jahr 1911.

## Öffentliche Sitzungen.

### Sitzung am 26. Januar zur Feier des Geburtsfestes Seiner Majestät des Kaisers und Königs und des Jahrestages König Friedrich's II.

Der an diesem Tage vorsitzende Secretar Hr. Vahlen eröffnete die Sitzung mit einer kurzen auf die Doppelfeier des Tages bezüglichen Ansprache. Darauf hielt Hr. Nernst den wissenschaftlichen Festvortrag: Über neuere Probleme der Wärmetheorie. Weiter wurde verkündet, dafs die Akademie ihrem ordentlichen Mitglied Hrn. Jakob Heinrich van't Hoff die Helmholtz-Medaille verliehen habe. Nach der Mittheilung, dafs im laufenden Jahre die Dr. Carl Güttler-Stiftung in Wirksamkeit trete, wurden im Auszuge die Jahresberichte über die wissenschaftlichen Unternehmungen der Akademie und über die ihr angegliederten Stiftungen und Institute erstattet, welche im Sitzungsbericht im Wortlaut abgedruckt sind. Zum Schlufs folgte der Bericht über die seit dem letzten Friedrichs-Tage (27. Januar 1910) in dem Personalstande der Akademie eingetretenen Veränderungen.

### Sitzung am 29. Juni zur Feier des Leibnizischen Jahrestages.

Hr. Waldeyer, als vorsitzender Secretar, eröffnete die Sitzung mit einer kurzen Ansprache.

Darauf hielten die seit dem letzten Leibniz-Tage (30. Juni 1910) neu eingetretenen Mitglieder der philosophisch-historischen Classe

HH. Morf und Wölfflin ihre Antrittsreden, die von dem beständigen Secretar Hrn. Diels beantwortet wurden. Es folgten Gedächtnifsreden auf Richard Lepsius von Hrn. Erman, auf Adolf Tobler von Hrn. Morf, auf Heinrich Zimmer von Hrn. Wilhelm Schulze und auf Jakob Heinrich van't Hoff von Hrn. Fischer.

Alsdann wurde verkündigt, dafs die Akademie eine Anzahl von Leibniz-Medaillen verliehen habe, und zwar in Gold dem Geheimen Hofrath Professor Dr. Hans Meyer in Leipzig, in Silber dem Custos am Geologisch-Palaeontologischen Institut und Museum der Universität Berlin Dr. Werner Janensch, dem Kaufmann Hans Osten, z. Zt. in Montevideo, und dem Oberbibliothekar an der Universitäts-Bibliothek in Marburg Prof. Dr. Georg Wenker.

Schliefslich erfolgten Mittheilungen betreffend das Preisausschreiben aus dem Cothenius'schen Legat für 1911, welches unverändert für 1914 erneuert wurde, den Preis der Graf Loubat-Stiftung und das Stipendium der Eduard Gerhard-Stiftung.

## Verzeichnifs der im Jahre 1911 gelesenen Abhandlungen.

### Physik und Chemie.

Nernst, Untersuchungen über die specifische Wärme bei tiefen Temperaturen. III. (G. S. 23. Febr.; *S. B.* 9. März.)

Lindemann, F. A., Untersuchungen über die specifische Wärme bei tiefen Temperaturen. IV. Vorgelegt von Nernst. (G. S. 23. Febr.; *S. B.* 9. März.)

Rubens und Prof. O. von Baeyer, über eine äufserst langwellige Strahlung des Quecksilberdampfs. (Cl. 16. März; *S. B.*)

Nernst und F. A. Lindemann, Untersuchungen über die specifische Wärme bei tiefen Temperaturen. V. (G. S. 6. April; *S. B.* 27. April.)

Kurlbaum, Prof. F., Messung der Sonnentemperatur. Vorgelegt von Rubens. (G. S. 11. Mai; *S. B.*)

Fischer und Dr. H. Scheibler, zur Kenntnifs der Walden'schen Umkehrung. VI. (Cl. 18. Mai; *S. B.*)

Rubens und Prof. O. von Baeyer, über die Energievertheilung der von der Quarzquecksilberlampe ausgesandten langwelligen Strahlung. (Cl. 15. Juni; *S. B.*)

Planck, zur Hypothese der Quantenemission. (G. S. 13. Juli; *S. B.*)

Warburg, über den Energieumsatz bei photochemischen Vorgängen in Gasen. (Cl. 20. Juli; *S. B.*)

Wien, Bestimmung der mittleren freien Weglänge der Kanalstrahlen. (G. S. 27. Juli; *S. B.*)

## Mineralogie, Geologie und Palaeontologie.

Meyer, Prof. R. J., über einen scandiumreichen Orthit aus Finnland und den Vorgang seiner Verwitterung. Vorgelegt von Liebisch. (G. S. 23. März; *S. B.*)

Liebisch, über den Schichtenbau und die elektrischen Eigenschaften des Zinnerzes. (Cl. 30. März; *S. B.*)

Schwietring, Dr. F., über den Polarisationswinkel der durchsichtigen inactiven Krystalle. Vorgelegt von Liebisch. (Cl. 30. März; *S. B.*)

Tornquist, Prof. A., die Tektonik des tieferen Untergrundes Norddeutschlands. Vorgelegt von Branca. (Cl. 6. Juli; *S. B.* 27. Juli.)

Frech, Prof. F., und Dr. C. Renz, Kreide und Trias im Kiona- und Oetagebiet (Mittelgriechenland). Vorgelegt von Branca. (Cl. 2. Nov.; *S. B.* 7. Dec.)

Branca, über die bisherigen Ergebnisse der Tendaguru-Expedition in Deutsch-Ostafrica. (G. S. 23. Nov.)

## Botanik und Zoologie.

Engler und Dr. K. Krause, über den anatomischen Bau der baumartigen Cyperacee Schoenodendron Bücheri Engl. aus Kamerun. (Cl. 4. Mai; *Abh.*)

## Anatomie und Physiologie, Pathologie.

Morgenroth, Prof. J., und Dr. L. Halberstaedter, über die Beeinflussung der experimentellen Trypanosomeninfection durch Chinin und Chininderivate. Vorgelegt von Orth. (Cl. 12. Jan.; *S. B.*)

Neiding, Dr. M., über die Kerne des Diencephalon bei einigen Säugethieren. Vorgelegt von Waldeyer. (G. S. 23. Febr.; *Abh.*)

Rubner, Verluste und Wiedererneuerung im Lebensprocefs. (Cl. 2. März; *S. B.* 20. April.)

Orth, über Atrophie der Harnkanälchen. (Cl. 16. März; *S. B.*)

Isenschmid, Dr. R., zur Kenntnifs der Grofshirnrinde der Maus. Vorgelegt von Waldeyer. (Cl. 16. März; *Abh.*)

Röthig, Dr. P., Zellanordnungen und Faserzüge im Vorderhirn von Siren lacertina. Vorgelegt von Waldeyer. (G. S. 23. März; *Abh.*)

Munk, Weiteres zur Anatomie und Physiologie der Grofshirnrinde. (Cl. 20. April.)

Waldeyer, Gehirn und Skelet einer 16 jährigen Mikrocephalin. (G. S. 27. April.)

Agadschanianz, Dr. K., über die Kerne des menschlichen Kleinhirns. Vorgelegt von Waldeyer. (Cl. 18. Mai; *Abh.*)

O. Hertwig, Mesothoriumversuche an thierischen Keimzellen, ein experimenteller Beweis für die Idioplasmanatur der Kernsubstanzen. Dritte Mittheilung. (Cl. 6. Juli; *S. B.* 19. Oct.)

## Astronomie, Geographie und Geophysik.

Helmert, über die Genauigkeit der Dimensionen des Hayford'schen Erdellipsoids. (Cl. 12. Jan.; *S. B.*)

Struve, über die Vortheile der Anwendung eines Reversionsprismas bei Doppelsternmessungen. (G. S. 19. Jan.; *S. B.*)

Penck, über einige verwickelte Hebungserscheinungen. (G. S. 1. Juni.)

Helmert, die Erfahrungsgrundlagen der Lehre vom allgemeinen Gleichgewichtszustande der Massen in der Erdkruste. (Cl. 2. Nov.)

Struve, über die Lage der Marsachse und die Constanten im Marssystem. (Cl. 30. Nov.; *S. B.*)

## Mathematik.

Frobenius, über den Rang einer Matrix. (Cl. 12. Jan.; *S. B.*)

Peters, Prof. J., Tafel einundzwanzigstelliger Werthe der Functionen Sinus und Cosinus. Vorgelegt von Auwers. (G. S. 19. Jan.; *Abh.*)

Frobenius, über den Rang einer Matrix. II. (Cl. 2. Febr.; *S. B.*)

Bieberbach, Dr. L., über einen Satz des Hrn. C. Jordan in der Theorie der endlichen Gruppen linearer Substitutionen. Vorgelegt von Frobenius. (Cl. 16. Febr.; *S. B.* 23. Febr.)

Frobenius, über den von L. Bieberbach gefundenen Beweis eines Satzes von C. Jordan. (G. S. 23. Febr.; *S. B.*)

Frobenius, über unitäre Matrizen. (G. S. 23. März; *S. B.*)

Carathéodory, Prof. C., und Prof. E. Landau, Beiträge zur Convergenz von Functionenfolgen. Vorgelegt von Schottky. (Cl. 20. April; *S. B.* 18. Mai.)

Schur, Prof. I., über Gruppen periodischer linearer Substitutionen. Vorgelegt von Frobenius. (G. S. 1. Juni; *S. B.*)

Schwarz, Bestimmung aller reellen und nicht reellen Minimalflächen, welche eine (oder mehr als eine) Schaar von Curven zweiten Grades enthalten. (Cl. 15. Juni.)

Frobenius, über die unzerlegbaren discreten Bewegungsgruppen. (Cl. 15. Juni; *S. B.*)

Lichtenstein, Dr. L., Beweis des Satzes, dafs jedes hinreichend kleine, im wesentlichen stetig gekrümmte, singularitätenfreie Flächenstück auf einen Theil einer Ebene zusammenhängend und in den kleinsten Theilen ähnlich abgebildet werden kann. Vorgelegt von Schwarz. (Cl. 15. Juni; *Abh.*)

Frobenius, gruppentheoretische Ableitung der 32 Krystallclassen. (G. S. 22. Juni; *S. B.*)

Schottky, über das Euler'sche Drehungsproblem. (G. S. 26. Oct.; *S. B.*)

Schottky, über die vier Jacobi'schen Theta. (G. S. 26. Oct.; *S. B.*)

## Mechanik und Technik.

Zimmermann, über die Bedeutung von Untersuchungen über die Knickfestigkeit elastischer Stäbe für die Praxis. (Cl. 2. Febr.)

Martens, über die technische Prüfung des Kautschuks und der Ballonstoffe im Königlichen Materialprüfungsamt zu Grofs-Lichterfelde. (Cl. 16. Febr.; *S. B.* 16. März.)

Müller-Breslau, über excentrisch gedrückte Rahmenstäbe. (Cl. 16. Nov.)

Kötter, Prof. E., über den Grenzfall, in welchem ein ebenes Fachwerk von $n$ Knotenpunkten und $2n-3$ Stäben oder ein räumliches Fachwerk von $n$ Knotenpunkten und $3n-6$ Stäben nicht mehr statisch bestimmt ist. Vorgelegt von Müller-Breslau. (G. S. 23. Nov.; *Abh.* 1912.)

Zimmermann, über den Luftwiderstand sich drehender Körper. (Cl. 14. Dec.)

Martens, über die Messung grofser Kräfte im Materialprüfungswesen. (G. S. 21. Dec.; *S. B.*)

## Philosophie.

Stumpf, über die Bedeutung des Ähnlichkeitsverhältnisses bei der mechanischen Reproduction der Vorstellungen. (Cl. 2. März.)

## Geschichte des Alterthums.

Meister, Prof. R., kyprische Syllabarinschriften in nichtgriechischer Sprache. Vorgelegt von E. Meyer. (G. S. 19. Jan.; *S. B.* 9. Febr.)

Dressel, über die Medaillonprägung in der römischen Kaiserzeit und über die Entwicklung und Bedeutung der Medaillonsammlung des Berliner Münzcabinets. (G. S. 11. Mai.)

Meister, Prof. R., Inschriften aus Rantidi in Kypros. Vorgelegt von v. Wilamowitz-Moellendorff. (G. S. 11. Mai; *S. B.* 1. Juni.)

Frhr. Hiller von Gaertringen, Prof. F., und Dr. H. Lattermann, arkadische Forschungen. Vorgelegt von v. Wilamowitz-Moellendorff. (G. S. 22. Juni; *Abh.*)

E. Meyer, über einige Probleme der ältesten Geschichte des Aegaeischen Meeres. (Cl. 6. Juli.)

von Wilamowitz-Moellendorff und Dr. F. Zucker, zwei Edicte des Germanicus auf einem Papyrus des Berliner Museums. (G. S. 13. Juli; *S. B.* 27. Juli.)

## Mittlere und neuere Geschichte.

Mordtmann, Dr. J., über das türkische Fürstengeschlecht der Karasi in Mysien. Vorgelegt von Sachau. (Cl. 12. Jan.; *S. B.*)

Dilthey, über die Entstehung der historischen Weltanschauung Niebuhr's in seiner Jugendzeit. (Cl. 16. Febr.)

Koser, über die politische Haltung des Grafen Adam Schwarzenberg im ersten Regierungsjahrzehnt des Kurfürsten Georg Wilhelm von Brandenburg. (Cl. 30. März.)

Lenz, über die Anfänge des Ministeriums Eichhorn und die Berliner Universität. (G. S. 6. April.)

Schäfer, über die materiellen Kräfte des schwedischen Staatswesens zur Zeit von Gustav Adolf's Regierungsantritt. (G. S. 22. Juni.)

Koser, Friedrich der Grofse im Urtheil der Reformzeit (1807—1813). (Cl. 14. Dec.)

### Kirchengeschichte.

Harnack, das hohe Lied des Apostels Paulus von der Liebe (I. Kor. 13) und seine religionsgeschichtliche Bedeutung. (G. S. 9. Febr.; *S. B.*)

von Wilamowitz-Moellendorff, ein Stück aus dem Ancoratus des Epiphanios. (G. S. 27. Juli; *S. B.*)

### Staatswissenschaft.

von Schmoller, die Bevölkerungsbewegung der deutschen Städte von ihrem Ursprung bis ins 19. Jahrhundert. (Cl. 2. Febr.)

### Allgemeine, deutsche und andere neuere Philologie.

Schmidt, dramatische Entwürfe Ludwig Uhland's. (G. S. 9. März.)

Burdach, die älteste Gestalt des West-östlichen Divans. Zweite Untersuchung. (Cl. 18. Mai.)

Roethe, über die mhd. »Farbendeutung«. (Cl. 15. Juni.)

W. Schulze, über den Zusammenhang der indogermanischen Praesensbildung mit der nominalen Stammbildung. (Cl. 20. Juli.)

Brandl, über die älteste Shakespearebiographie, von Rowe 1709. (G. S. 27. Juli.)

Heusler, zum isländischen Fehdewesen in den Geschichten des 12. und 13. Jahrhunderts. (Cl. 2. Nov.)

Morf, zur sprachlichen Gliederung Frankreichs. (Cl. 30. Nov.; *Abh.*)

## Classische Philologie.

Thulin, Dr. C., die Handschriften des Corpus agrimensorum Romanorum. Vorgelegt von Diels. (Cl. 16. März; *Abh.*)

von Wilamowitz-Moellendorff, über die Wespen des Aristophanes. I. (Cl. 20. April; *S. B.*)

von Wilamowitz-Moellendorff, über die Wespen des Aristophanes. II. (Cl. 4. Mai; *S. B.*)

Wellmann, Prof. M., über eine spätorphische Schrift medicinischen Inhalts. Vorgelegt von Diels. (Cl. 19. Oct.; *S. B.*)

Heeg, Dr. J., über ein angebliches Dioklescitat. Vorgelegt von Diels. (G. S. 23. Nov.; *S. B.*)

## Archaeologie, Kunstwissenschaft.

Wiegand, Dr. Th., siebenter vorläufiger Bericht über die von den Königlichen Museen in Milet und Didyma unternommenen Ausgrabungen. Vorgelegt von Conze. (Cl. 2. Febr.; *Abh.*)

Wiegand, Dr. Th., erster vorläufiger Bericht über die von den Königlichen Museen unternommenen Ausgrabungen in Samos. Vorgelegt von Conze. (G. S. 13. Juli; *Abh.*)

Wölfflin, über das Problem des Stils in der bildenden Kunst. (G. S. 7. Dec.)

## Orientalische Philologie.

Sachau, über den Papyrus 6 der Elephantine-Sammlung. (Cl. 12. Jan.)

Erman, Denksteine aus der thebanischen Gräberstadt. (Cl. 16. März; *S. B.* 30. Nov.)

Lüders, das Śāriputraprakaraṇa, ein Drama des Aśvaghoṣa. (Cl. 16. März; *S. B.* 30. März.)

Kluge, Dr. Th., Bericht über photographische Aufnahmen altgeorgischer Handschriften. Vorgelegt von W. Schulze. (Cl. 16. März; *S. B.*)

Jacobi, zur Frühgeschichte der indischen Philosophie. (G. S. 22. Juni; *S. B.* 13. Juli.)

Müller, soghdische Studien. (Cl. 19. Oct.)

von Le Coq, Dr. A., türkische Manichaica aus Chotscho. I. Vorgelegt von Müller. (Cl. 19. Oct.; *Abh.*)

E. Meyer, zu den aramäischen Papyri von Elephantine. (G. S. 26. Oct.; *S. B.* 23. Nov.)

Jacobi, Cultur-, Sprach- und Litterarhistorisches aus dem Kauṭilīya. (Cl. 2. Nov.; *S. B.* 9. Nov.)

Lüders, Dichtung und Cult im alten Indien. (Cl. 16. Nov.)

Littmann, Prof. E., die Inschriften des Königs Kalumu. Vorgelegt von E. Meyer. (Cl. 16. Nov.; *S. B.*)

van Berchem, Dr. M., die muslimischen Inschriften von Pergamon. Vorgelegt von Sachau. (G. S. 23. Nov.; *Abh.*)

Brockelmann, Prof. C., zu den Inschriften des Königs Kalumu. Vorgelegt von Sachau. (G. S. 21. Dec.; *S. B.*)

## Americanistik.

Seler, die Stuckfaçade von Acanceh in Yucatan. (G. S. 9. Nov.; *S. B.* 23. Nov.)

## Bericht über den Erfolg der Preisausschreibungen für 1911 und neue Preisausschreibung.

*Preisausschreiben aus dem Cothenius'schen Legat.*

Die Akademie hat in der Leibniz-Sitzung des Jahres 1908 folgende Preisaufgabe aus dem Cothenius'schen Legat ausgeschrieben:

»Der Entwickelungsgang einer oder einiger Ustilagineen soll möglichst lückenlos verfolgt und dargestellt werden, wobei besonders auf die Überwinterung der Sporen und Mycelien Rücksicht zu nehmen ist. Wenn irgend möglich, sind der Abhandlung Praeparate, welche die Frage entscheiden, beizulegen.«

Bewerbungsschriften, welche bis zum 31. December 1910 erwartet wurden, sind nicht eingelaufen; die Akademie hat daraufhin beschlossen, die Aufgabe unverändert zu erneuern.

Der ausgesetzte Preis beträgt zweitausend Mark.

Die Bewerbungsschriften können in deutscher, lateinischer, französischer, englischer oder italienischer Sprache abgefafst sein. Schriften, die in störender Weise unleserlich geschrieben sind, können durch Beschlufs der zuständigen Classe von der Bewerbung ausgeschlossen werden.

Jede Bewerbungsschrift ist mit einem Spruchwort zu bezeichnen, und dieses auf einem beizufügenden versiegelten, innerlich den Namen und die Adresse des Verfassers angebenden Zettel äufserlich zu wiederholen. Schriften, welche den Namen des Verfassers nennen oder deutlich ergeben, werden von der Bewerbung ausgeschlossen. Zurückziehung einer eingelieferten Preisschrift ist nicht gestattet.

Die Bewerbungsschriften sind bis zum 31. December 1913 im Bureau der Akademie, Berlin W 35, Potsdamer Strafse 120, einzuliefern. Die Verkündigung des Urtheils erfolgt in der Leibniz-Sitzung des Jahres 1914.

Sämmtliche bei der Akademie zum Behuf der Preisbewerbung eingegangene Arbeiten nebst den dazu gehörigen Zetteln werden ein Jahr lang von dem Tage der Urtheilsverkündigung ab von der Akademie für die Verfasser aufbewahrt. Nach Ablauf der bezeichneten Frist steht es der Akademie frei, die nicht abgeforderten Schriften und Zettel zu vernichten.

*Preis der Graf Loubat-Stiftung.*

Die Akademie hat auf Vorschlag ihrer Commission für die Graf Loubat-Stiftung beschlossen, den für dieses Jahr ausgeschriebenen Preis derselben von 3000 Mark Hrn. Albert Bernhard Faust, Assistant Professor an der Cornell University zu Ithaca, N. Y. für sein zweibändiges Werk »The German Element in the United States«, Boston und New York 1909, zuzuerkennen.

## Verzeichnifs der im Jahre 1911 erfolgten besonderen Geldbewilligungen aus akademischen Mitteln zur Ausführung wissenschaftlicher Unternehmungen.

Es wurden im Laufe des Jahres 1911 bewilligt:

2300 Mark dem Mitglied der Akademie Hrn. Engler zur Fortführung der Herausgabe des »Pflanzenreich«.

7650 » dem Mitglied der Akademie Hrn. F. E. Schulze zur Fortführung des Unternehmens »Das Tierreich«.

7000 Mark Demselben als Zuschufs zu den Kosten des Drucks eines »Nomenclator animalium generum et subgenerum«.

6000 » dem Mitglied der Akademie Hrn. Koser zur Fortführung der Herausgabe der Politischen Correspondenz Friedrich's des Grofsen.

5000 » dem Mitglied der Akademie Hrn. von Wilamowitz-Moellendorff zur Fortführung der Sammlung der griechischen Inschriften.

4000 » der Deutschen Commission der Akademie zur Fortführung ihrer Unternehmungen.

1000 » zur Förderung des Unternehmens des Thesaurus linguae Latinae über den etatsmäfsigen Beitrag von 5000 Mark hinaus.

1500 » zur Bearbeitung der hieroglyphischen Inschriften der griechisch-römischen Epoche für das Wörterbuch der aegyptischen Sprache.

500 » zu der von den cartellirten deutschen Akademien unternommenen Herausgabe der mittelalterlichen Bibliothekskataloge.

1760 » dem Mitglied der Akademie Hrn. Rubens zur Fortführung seiner Untersuchungen auf dem Gebiete der langwelligen Strahlung.

500 » dem Mitglied der Akademie Hrn. von Wilamowitz-Moellendorff zur Anfertigung von Photographien Plutarchischer Handschriften.

7500 » zur Herausgabe des von dem verstorbenen Mitglied der Akademie Adolf Tobler hinterlassenen altfranzösischen Wörterbuchs.

5000 » dem correspondirenden Mitglied der Akademie Hrn. Voigt in Göttingen zur Beschaffung von Apparaten

behufs Untersuchung der Gesetze der complicirten Typen des Zeeman-Effectes.

1500 Frcs. der Biologischen Station in Roscoff gegen Einräumung eines von der Akademie zu vergebenden Arbeitsplatzes für die Dauer eines Jahres.

1000 Mark dem von dem zweiten Deutschen Kalitage eingesetzten Comité zur wissenschaftlichen Erforschung der norddeutschen Kalisalzlager.

1000 » als Beihülfe zu den Kosten der Herausgabe einer Sammlung aller in der Literatur vorkommenden physikalisch-chemischen Constanten.

500 » Hrn. Prof. Dr. Richard Börnstein in Berlin zur Bearbeitung der 4. Auflage des Werkes Landolt-Börnstein, Physikalisch-chemische Tabellen.

800 » Hrn. Prof. Dr. Erich von Drygalski in München zu Arbeiten für die Vollendung des Chinawerkes von Ferdinand von Richthofen.

600 » Hrn. Prof. Dr. Julius Franz in Breslau zur Fortsetzung seiner Arbeit an der Bestimmung der Coordinaten lunarer Objecte.

300 » Hrn. Dr. Victor Franz in Frankfurt a. M. zu Untersuchungen über Fischwanderungen.

750 » Hrn. Prof. Dr. Friedrich Frhrn. von Huene in Tübingen zu einer Reise nach Nordamerica behufs Studien über fossile Reptilien.

800 » Hrn. Prof. Dr. Johann Koenigsberger in Freiburg i. Br. zur Fortsetzung seiner Untersuchungen über Emission und Absorption des Lichts.

400 » Hrn. Dr. Paul Victor Neugebauer in Berlin zur Berechnung von Sterntafeln zur astronomischen Chronologie.

700 Mark Hrn. Prof. Dr. Heinrich Poll in Berlin zur Fortsetzung seiner Studien über Kreuzung und Vererbung.

500 » Hrn. Prof. Dr. Otto Ruff in Danzig zu Untersuchungen über das Osmium.

900 » Hrn. Prof. Dr. Gustav Tornier in Berlin zu Untersuchungen über den Bau der palaeontologischen Dinosaurier.

700 » Hrn. Dr. Hermann Beckh in Berlin zur Drucklegung seiner kritischen Ausgabe der buddhistischen Spruchsammlung Udānavarga.

1800 » Hrn. Pfarrer a. D. Dr. Heinrich Hagenmeyer in Bödigheim (Baden) als Beitrag zu den Kosten der Drucklegung einer Ausgabe der Historia Hierosolymitana Fulcher's von Chartres.

1500 » Hrn. Dr. Richard Hamann in Steglitz zu Forschungen über den Backsteinbau der Mark Brandenburg.

1200 » Hrn. Privatdocenten Dr. Hugo Prinz in Breslau zur Drucklegung seiner Arbeit »Astralsymbole im alten Orient«.

300 » Hrn. Prof. Dr. Heinrich Schäfer in Berlin zur Fortsetzung seiner nubischen Studien.

750 » Hrn. Prof. Dr. Georg Thiele in Marburg zur Bearbeitung von Ausgaben des Martialis und des Phaedrus.

## Verzeichnifs der im Jahre 1911 erschienenen im Auftrage oder mit Unterstützung der Akademie bearbeiteten oder herausgegebenen Werke.

Das Pflanzenreich. Regni vegetabilis conspectus. Im Auftrage der Königl. preufs. Akademie der Wissenschaften hrsg. von A. Engler. Heft 47—51. Leipzig 1911.

Das Tierreich. Eine Zusammenstellung und Kennzeichnung der rezenten Tierformen. Begründet von der Deutschen Zoologischen Gesellschaft. Im Auftrage der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Berlin hrsg. von Franz Eilhard Schulze. Lief. 26—29. Berlin 1911.

Acta Borussica. Denkmäler der Preußischen Staatsverwaltung im 18. Jahrhundert. Hrsg. von der Königlichen Akademie der Wissenschaften. Die einzelnen Gebiete der Verwaltung: Handels-, Zoll- und Akzisepolitik. Bd. 1. — Münzwesen. Beschreibender Teil. Heft 3. Berlin 1911.

Kant's gesammelte Schriften. Hrsg. von der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften. Bd. 3 (Neudruck). Bd. 4 (Neudruck). Bd. 14. Berlin 1911.

Deutsche Texte des Mittelalters hrsg. von der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften. Bd. 19. Die poetische Bearbeitung des Buches Daniel. Berlin 1911.

Wielands Gesammelte Schriften. Hrsg. von der Deutschen Kommission der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften. Abt. 1, Bd. 7. Abt. 2, Bd. 3. Berlin 1911.

Thesaurus linguae Latinae editus auctoritate et consilio Academiarum quinque Germanicarum Berolinensis Gottingensis Lipsiensis Monacensis Vindobonensis. Vol. 3, Fasc. 8. Vol. 5, Fasc. 3. Lipsiae 1911.

Ergebnisse der Plankton-Expedition der Humboldt-Stiftung. Bd. 2. Fc: Schiemenz, Paulus. Die Heteropoden. He: von Ritter-Záhony, Rudolf. Die Chätognathen. Bd. 3. Lc: Rhumbler, Ludwig. Die Foraminiferen (Thalamophoren). Tl. 1. Lh: Die Tripyleen Radiolarien. 11. Borgert, A. Challengeridae. Bd. 5. O: Hensen, V. Das Leben im Ozean nach Zählungen seiner Bewohner. Kiel und Leipzig 1911.

M. Tulli Ciceronis Paradoxa Stoicorum, Academicorum reliquiae cum Lucullo, Timaeus, de natura deorum, de divinatione, de fato ed. Otto Plasberg. Fasc. 2. Lipsiae 1911.

Die griechischen christlichen Schriftsteller der ersten drei Jahrhunderte. Hrsg. von der Kirchenväter-Commission der Königl. Preufsischen Akademie der Wissenschaften. Bd. 19: Theodoret, Kirchengeschichte. Bd. 20: Eusebius. Bd. 5. Leipzig 1911.

Philippson, Alfred. Reisen und Forschungen im westlichen Kleinasien. Heft 2. Gotha 1911. (Ergänzungsheft N. 172 zu »Petermanns Mitteilungen«.)

Selenka, M. Lenore, und Blanckenhorn, Max. Die Pithecanthropus-Schichten auf Java. Geologische und paläontologische Ergebnisse der Trinil-Expedition (1907 und 1908).

Adickes, Erich. Untersuchungen zu Kants physischer Geographie. Tübingen 1911.

Anding, E. Sechsstellige Tafeln der Bessel'schen Funktionen imaginären Argumentes. Leipzig 1911.

Ascherson, Paul, und Graebner, Paul. Synopsis der mitteleuropäischen Flora. Lief. 71—74. Leipzig 1911.

Bauschinger, J., und Peters, J. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit acht Dezimalstellen. Bd. 2. Leipzig 1911.

Beckh, Hermann. Udānavarga. Eine Sammlung buddhistischer Sprüche in tibetischer Sprache. Berlin 1911.

Leonhardi Euleri opera omnia. Sub auspiciis Societatis Scientiarum naturalium Helveticae edenda cur. Ferdinand Rudio, Adolf Krazer, Paul Stäckel. Ser. I: Vol. 1. Ser. III: Vol. 3. Lipsiae et Berolini 1911.

Fischer, Albert. Das deutsche evangelische Kirchenlied des 17. Jahrhunderts. Vollendet und hrsg. von W. Tümpel. Bd. 5. Gütersloh 1911.

Glück, Hugo. Biologische und morphologische Untersuchungen über Wasser- und Sumpfgewächse. Tl. 3. Jena 1911.

Libanii opera rec. Richardus Foerster. Vol. 6. Lipsiae 1911. (Bibliotheca script. Graec. et Roman. Teubneriana.)

Schulthefs, Friedrich. Kalila und Dimna, syrisch und deutsch. I. II. Berlin 1911.

Unger, Rudolf. Hamann und die Aufklärung. Bd. 1. 2. Jena 1911.

Die Vegetation der Erde. Sammlung pflanzengeographischer Monographien hrsg. von A. Engler und O. Drude. XI. Adamović, Lujo. Die Vegetationsverhältnisse der Balkanländer. XII. Weberbauer, A. Die Pflanzenwelt der peruanischen Anden. XIII. Harshberger, John W. Phytogeographic Survey of North America. Leipzig 1909—11.

## Veränderungen im Personalstande der Akademie im Laufe des Jahres 1911.

Es wurden gewählt:

zu ordentlichen Mitgliedern der physikalisch-mathematischen Classe:

Hr. Gottlieb Haberlandt, bisher correspondirendes Mitglied, bestätigt durch K. Cabinetsordre vom 3. Juli 1911,

» Gustav Hellmann, bestätigt durch K. Cabinetsordre vom 2. December 1911;

zu ordentlichen Mitgliedern der philosophisch-historischen Classe:

Hr. Heinrich Morf
» Heinrich Wölfflin } bestätigt durch K. Cabinetsordre vom 14. December 1910 [in der Liste für 1910 versehentlich fehlend],

» Kuno Meyer, bestätigt durch K. Cabinetsordre vom 3. Juli 1911,
» Benno Erdmann, bisher correspondirendes Mitglied, bestätigt durch K. Cabinetsordre vom 25. Juli 1911:

zum correspondirenden Mitglied der physikalisch-mathematischen Classe:

Hr. Camillo Golgi in Pavia am 21. December 1911;

zu correspondirenden Mitgliedern der philosophisch-historischen Classe:

Hr. Jacob Wackernagel in Göttingen am 19. Januar 1911,
» Hermann Jacobi in Bonn am 9. Februar 1911,
» Franz Cumont in Brüssel
» James George Frazer in Cambridge, England
» Adolf Wilhelm in Wien
» Axel Olrik in Kopenhagen } am 27. April 1911,
» Paul Vinogradoff in Oxford am 22. Juni 1911.

Der beständige Secretar Hr. Vahlen legte dieses Amt mit dem 30. September 1911 nieder; zu seinem Nachfolger wählte die philosophisch-historische Classe Hrn. Roethe, dessen Wahl durch K. Cabinetsordre vom 29. August 1911 bestätigt wurde.

Gestorben sind:

das ordentliche Mitglied der physikalisch-mathematischen Classe:

Hr. Jakob Heinrich van't Hoff am 1. März 1911;

die ordentlichen Mitglieder der philosophisch-historischen Classe:

Hr. Reinhard Kekule von Stradonitz am 22. März 1911,
» Wilhelm Dilthey am 1. October 1911,
» Johannes Vahlen am 30. November 1911;

das auswärtige Mitglied der physikalisch-mathematischen Classe:

Sir Joseph Dalton Hooker in Sunningdale am 10. December 1911;

die correspondirenden Mitglieder der physikalisch-mathematischen Classe:

Hr. Albert Ladenburg in Breslau am 15. August 1911,
» Michel Lévy in Paris am 25. September 1911;

die correspondirenden Mitglieder der philosophisch-historischen Classe:

Hr. Wilhelm Wilmanns in Bonn am 29. Januar 1911,
» Émile Levasseur in Paris am 10. Juli 1911,
» Anton E. Schönbach in Graz am 25. August 1911,
» Gustav Gröber in Strafsburg am 5. November 1911.

# Verzeichnifs der Mitglieder der Akademie am Schlusse des Jahres 1911

nebst den Verzeichnissen der Inhaber der Helmholtz- und der Leibniz-Medaille und der Beamten der Akademie.

## I. Beständige Secretare.

| | Gewählt von der | Datum der Königlichen Bestätigung |
|---|---|---|
| Hr. *Auwers* | phys.-math. Classe | 1878 April 10. |
| - *Diels* | phil.-hist. - | 1895 Nov. 27. |
| - *Waldeyer* | phys.-math. - | 1896 Jan. 20. |
| - *Roethe* | phil.-hist. - | 1911 Aug. 29. |

## II. Ordentliche Mitglieder.

| Physikalisch-mathematische Classe | Philosophisch-historische Classe | Datum der Königlichen Bestätigung |
|---|---|---|
| Hr. *Arthur Auwers* | | 1866 Aug. 18. |
| | Hr. *Alexander Conze* | 1877 April 23. |
| - *Simon Schwendener* | | 1879 Juli 13. |
| - *Hermann Munk* | | 1880 März 10. |
| | - *Hermann Diels* | 1881 Aug. 15. |
| - *Wilhelm Waldeyer* | | 1884 Febr. 18. |
| | - *Heinrich Brunner* | 1884 April 9. |
| - *Franz Eilhard Schulze* | | 1884 Juni 21. |
| | - *Otto Hirschfeld* | 1885 März 9. |
| | - *Eduard Sachau* | 1887 Jan. 24. |
| | - *Gustav von Schmoller* | 1887 Jan. 24. |
| - *Adolf Engler* | | 1890 Jan. 29. |
| | - *Adolf Harnack* | 1890 Febr. 10. |
| - *Hermann Amandus Schwarz* | | 1892 Dec. 19. |
| - *Georg Frobenius* | | 1893 Jan. 14. |
| - *Emil Fischer* | | 1893 Febr. 6. |
| - *Oskar Hertwig* | | 1893 April 17. |
| - *Max Planck* | | 1894 Juni 11. |
| | - *Karl Stumpf* | 1895 Febr. 18. |
| | - *Erich Schmidt* | 1895 Febr. 18. |
| | - *Adolf Erman* | 1895 Febr. 18. |

| Physikalisch-mathematische Classe | Philosophisch-historische Classe | Datum der Königlichen Bestätigung |
|---|---|---|
| Hr. *Emil Warburg* | | 1895 Aug. 13. |
| | Hr. *Reinhold Koser* | 1896 Juli 12. |
| | - *Max Lenz* | 1896 Dec. 14. |
| | - *Ulrich von Wilamowitz-Moellendorff* | 1899 Aug. 2. |
| - *Wilhelm Branca* | | 1899 Dec. 18. |
| - *Robert Helmert* | | 1900 Jan. 31. |
| - *Heinrich Müller-Breslau* | | 1901 Jan. 14. |
| | - *Heinrich Dressel* | 1902 Mai 9. |
| | - *Konrad Burdach* | 1902 Mai 9. |
| - *Friedrich Schottky* | | 1903 Jan. 5. |
| | - *Gustav Roethe* | 1903 Jan. 5. |
| | - *Dietrich Schäfer* | 1903 Aug. 4. |
| | - *Eduard Meyer* | 1903 Aug. 4. |
| | - *Wilhelm Schulze* | 1903 Nov. 16. |
| | - *Alois Brandl* | 1904 April 3. |
| - *Hermann Struve* | | 1904 Aug. 29. |
| - *Hermann Zimmermann* | | 1904 Aug. 29. |
| - *Adolf Martens* | | 1904 Aug. 29. |
| - *Walther Nernst* | | 1905 Nov. 24. |
| - *Max Rubner* | | 1906 Dec. 2. |
| - *Johannes Orth* | | 1906 Dec. 2. |
| - *Albrecht Penck* | | 1906 Dec. 2. |
| | - *Friedrich Müller* | 1906 Dec. 24. |
| | - *Andreas Heusler* | 1907 Aug. 8. |
| - *Heinrich Rubens* | | 1907 Aug. 8. |
| - *Theodor Liebisch* | | 1908 Aug. 3. |
| | - *Eduard Seler* | 1908 Aug. 24. |
| | - *Heinrich Lüders* | 1909 Aug. 5. |
| | - *Heinrich Morf* | 1910 Dec. 14. |
| | - *Heinrich Wölfflin* | 1910 Dec. 14. |
| - *Gottlieb Haberlandt* | | 1911 Juli 3. |
| | - *Kuno Meyer* | 1911 Juli 3. |
| | - *Benno Erdmann* | 1911 Juli 25. |
| - *Gustav Hellmann* | | 1911 Dec. 2. |

## III. Auswärtige Mitglieder.

| Physikalisch-mathematische Classe | Philosophisch-historische Classe | Datum der Königlichen Bestätigung |
|---|---|---|
| | Hr. *Theodor Nöldeke* in Straſsburg | 1900 März 5. |
| | - *Friedrich Imhoof-Blumer* in Winterthur . . . . . | 1900 März 5. |
| | - *Pasquale Villari* in Florenz . | 1900 März 5. |
| Hr. *Wilhelm Hittorf* in Münster i. W. . . . . | | 1900 März 5. |
| - *Eduard Suess* in Wien . . . . . | | 1900 März 5. |
| - *Adolf von Baeyer* in München . . . . . | | 1905 Aug. 12. |
| | - *Vatroslav von Jagić* in Wien | 1908 Sept. 25. |
| | - *Panagiotis Kabbadias* in Athen | 1908 Sept. 25. |
| Lord *Rayleigh* in Witham, Essex . . . . . | | 1910 April 6. |

## IV. Ehrenmitglieder.

| | Datum der Königlichen Bestätigung |
|---|---|
| Earl *of Crawford and Balcarres* in Haigh Hall, Wigan . . . . | 1883 Juli 30. |
| Hr. *Max Lehmann* in Göttingen . . . . . | 1887 Jan. 24. |
| *Hugo* Graf *von und zu Lerchenfeld* in Berlin . . . . . | 1900 März 5. |
| Hr. *Richard Schöne* in Grunewald bei Berlin . . . . . | 1900 März 5. |
| Frau *Elise Wentzel* geb. *Heckmann* in Berlin . . . . . | 1900 März 5. |
| Hr. *Konrad von Studt* in Hannover . . . . . | 1900 März 17. |
| - *Andrew Dickson White* in Ithaca, N. Y. . . . . | 1900 Dec. 12. |
| *Rochus* Frhr. *von Liliencron* in Coblenz . . . . . | 1901 Jan. 14. |
| *Bernhard* Fürst *von Bülow* in Rom . . . . . | 1910 Jan. 31. |

## V. Correspondirende Mitglieder.

| Physikalisch-mathematische Classe. | Datum der Wahl |
|---|---|
| Hr. *Ernst Wilhelm Benecke* in Strafsburg | 1900 Febr. 8. |
| - *Lewis Boss* in Albany, N. Y. | 1910 Oct. 27. |
| - *Oskar Brefeld* in Charlottenburg | 1899 Jan. 19. |
| - *Heinrich Bruns* in Leipzig | 1906 Jan. 11. |
| - *Otto Bütschli* in Heidelberg | 1897 März 11. |
| - *Karl Chun* in Leipzig | 1900 Jan. 18. |
| - *Giacomo Ciamician* in Bologna | 1909 Oct. 28. |
| - *Gaston Darboux* in Paris | 1897 Febr. 11. |
| Sir *George Howard Darwin* in Cambridge | 1908 Juni 25. |
| Hr. *William Morris Davis* in Cambridge, Mass. | 1910 Juli 28. |
| - *Richard Dedekind* in Braunschweig | 1880 März 11. |
| - *Nils Christofer Duner* in Upsala | 1900 Febr. 22. |
| - *Ernst Ehlers* in Göttingen | 1897 Jan. 21. |
| *Roland* Baron *Eötvös* in Ofen-Pest | 1910 Jan. 6. |
| Hr. *Max Fürbringer* in Heidelberg | 1900 Febr. 22. |
| Sir *Archibald Geikie* in Haslemere, Surrey | 1889 Febr. 21. |
| - *David Gill* in London | 1890 Juni 5. |
| Hr. *Camillo Golgi* in Pavia | 1911 Dec. 21. |
| - *Paul Gordan* in Erlangen | 1900 Febr. 22. |
| - *Karl Graebe* in Frankfurt a. M. | 1907 Juni 13. |
| - *Ludwig von Graff* in Graz | 1900 Febr. 8. |
| - *Julius von Hann* in Wien | 1889 Febr. 21. |
| - *Victor Hensen* in Kiel | 1898 Febr. 24. |
| - *Richard von Hertwig* in München | 1898 April 28. |
| Sir *Victor Horsley* in London | 1910 Juli 28. |
| Hr. *Adolf von Koenen* in Göttingen | 1904 Mai 5. |
| - *Leo Koenigsberger* in Heidelberg | 1893 Mai 4. |
| - *Wilhelm Körner* in Mailand | 1909 Jan. 7. |
| - *Friedrich Küstner* in Bonn | 1910 Oct. 27. |
| - *Henri Le Chatelier* in Paris | 1905 Dec. 14. |
| - *Philipp Lenard* in Heidelberg | 1909 Jan. 21. |
| - *Gabriel Lippmann* in Paris | 1900 Febr. 22. |
| - *Hendrik Antoon Lorentz* in Leiden | 1905 Mai 4. |
| - *Hubert Ludwig* in Bonn | 1898 Juli 14. |
| - *Felix Marchand* in Leipzig | 1910 Juli 28. |
| - *Friedrich Merkel* in Göttingen | 1910 Juli 28. |

| | Datum der Wahl |
|---|---|
| Hr. *Franz Mertens* in Wien | 1900 Febr. 22. |
| - *Henrik Mohn* in Christiania | 1900 Febr. 22. |
| - *Alfred Gabriel Nathorst* in Stockholm | 1900 Febr. 8. |
| - *Karl Neumann* in Leipzig | 1893 Mai 4. |
| - *Max Noether* in Erlangen | 1896 Jan. 30. |
| - *Wilhelm Ostwald* in Grofs-Bothen, Kgr. Sachsen | 1905 Jan. 12. |
| - *Wilhelm Pfeffer* in Leipzig | 1889 Dec. 19. |
| - *Émile Picard* in Paris | 1898 Febr. 24. |
| - *Edward Charles Pickering* in Cambridge, Mass. | 1906 Jan. 11. |
| - *Henri Poincaré* in Paris | 1896 Jan. 30. |
| - *Georg Quincke* in Heidelberg | 1879 März 13. |
| - *Ludwig Radlkofer* in München | 1900 Febr. 8. |
| Sir *William Ramsay* in London | 1896 Oct. 29. |
| Hr. *Gustaf Retzius* in Stockholm | 1893 Juni 1. |
| - *Theodore William Richards* in Cambridge, Mass. | 1909 Oct. 28. |
| - *Wilhelm Konrad Röntgen* in München | 1896 März 12. |
| - *Heinrich Rosenbusch* in Heidelberg | 1887 Oct. 20. |
| - *Georg Ossian Sars* in Christiania | 1898 Febr. 24. |
| - *Oswald Schmiedeberg* in Strafsburg | 1910 Juli 28. |
| - *Gustav Schwalbe* in Strafsburg | 1910 Juli 28. |
| - *Hugo von Seeliger* in München | 1906 Jan. 11. |
| *Hermann* Graf *zu Solms-Laubach* in Strafsburg | 1899 Juni 8. |
| Hr. *Johann Wilhelm Spengel* in Giefsen | 1900 Jan. 18. |
| - *Eduard Strasburger* in Bonn | 1889 Dec. 19. |
| - *Johannes Strüver* in Rom | 1900 Febr. 8. |
| Sir *Joseph John Thomson* in Cambridge | 1910 Juli 28. |
| Hr. *August Toepler* in Dresden | 1879 März 13. |
| - *Gustav von Tschermak* in Wien | 1881 März 3. |
| Sir *William Turner* in Edinburg | 1898 März 10. |
| Hr. *Woldemar Voigt* in Göttingen | 1900 März 8. |
| - *Johannes Diderik van der Waals* in Amsterdam | 1900 Febr. 22. |
| - *Otto Wallach* in Göttingen | 1907 Juni 13. |
| - *Eugenius Warming* in Kopenhagen | 1899 Jan. 19. |
| - *Heinrich Weber* in Strafsburg | 1896 Jan. 30. |
| - *August Weismann* in Freiburg i. Br. | 1897 März 11. |
| - *Wilhelm Wien* in Würzburg | 1910 Juli 14. |
| - *Julius von Wiesner* in Wien | 1899 Juni 8. |
| - *Ferdinand Zirkel* in Bonn | 1887 Oct. 20. |

| Philosophisch-historische Classe. | Datum der Wahl |
|---|---|
| Hr. *Karl von Amira* in München | 1900 Jan. 18. |
| - *Ernst Immanuel Bekker* in Heidelberg | 1897 Juli 29. |
| - *Friedrich von Bezold* in Bonn | 1907 Febr. 14. |
| - *Eugen Bormann* in Wien | 1902 Juli 24. |
| - *Émile Boutroux* in Paris | 1908 Febr. 27. |
| - *James Henry Breasted* in Chicago | 1907 Juni 13. |
| - *Ingram Bywater* in London | 1887 Nov. 17. |
| - *René Cagnat* in Paris | 1904 Nov. 3. |
| - *Arthur Chuquet* in Villemomble (Seine) | 1907 Febr. 14. |
| - *Franz Cumont* in Brüssel | 1911 April 27. |
| - *Samuel Rolles Driver* in Oxford | 1910 Dec. 8. |
| - *Louis Duchesne* in Rom | 1893 Juli 20. |
| - *Julius Euting* in Strafsburg | 1907 Juni 13. |
| - *Paul Foucart* in Paris | 1884 Juli 17. |
| - *James George Frazer* in Cambridge | 1911 April 27. |
| - *Wilhelm Fröhner* in Paris | 1910 Juni 23. |
| - *Percy Gardner* in Oxford | 1908 Oct. 29. |
| - *Ignaz Goldziher* in Ofen-Pest | 1910 Dec. 8. |
| - *Theodor Gomperz* in Wien | 1893 Oct. 19. |
| - *Francis Llewellyn Griffith* in Oxford | 1900 Jan. 18. |
| - *Ignazio Guidi* in Rom | 1904 Dec. 15. |
| - *Georgios N. Hatzidakis* in Athen | 1900 Jan. 18. |
| - *Albert Hauck* in Leipzig | 1900 Jan. 18. |
| - *Bernard Haussoullier* in Paris | 1907 Mai 2. |
| - *Barclay Vincent Head* in London | 1908 Oct. 29. |
| - *Johan Ludvig Heiberg* in Kopenhagen | 1896 März 12. |
| - *Karl Theodor von Heigel* in München | 1904 Nov. 3. |
| - *Antoine Héron de Villefosse* in Paris | 1893 Febr. 2. |
| - *Léon Heuzey* in Paris | 1900 Jan. 18. |
| - *Harald Hjärne* in Upsala | 1909 Febr. 25. |
| - *Maurice Holleaux* in Athen | 1909 Febr. 25. |
| - *Edvard Holm* in Kopenhagen | 1904 Nov. 3. |
| - *Théophile Homolle* in Paris | 1887 Nov. 17. |
| - *Christian Hülsen* in Florenz | 1907 Mai 2. |
| - *Hermann Jacobi* in Bonn | 1911 Febr. 9. |
| - *Adolf Jülicher* in Marburg | 1906 Nov. 1. |
| - *Karl Justi* in Bonn | 1893 Nov. 30. |
| - *Frederic George Kenyon* in London | 1900 Jan. 18. |
| - *Georg Friedrich Knapp* in Strafsburg | 1893 Dec. 14. |
| - *Basil Latyschew* in St. Petersburg | 1891 Juni 4. |

| | | Datum der Wahl |
|---|---|---|
| Hr. | *Friedrich Leo* in Göttingen | 1906 Nov. 1. |
| - | *August Leskien* in Leipzig | 1900 Jan. 18. |
| - | *Friedrich Loofs* in Halle a. S. | 1904 Nov. 3. |
| - | *Giacomo Lumbroso* in Rom | 1874 Nov. 12. |
| - | *Arnold Luschin von Ebengreuth* in Graz | 1904 Juli 21. |
| - | *John Pentland Mahaffy* in Dublin | 1900 Jan. 18. |
| - | *Gaston Maspero* in Paris | 1897 Juli 15. |
| - | *Wilhelm Meyer-Lübke* in Wien | 1905 Juli 6. |
| - | *Ludwig Mitteis* in Leipzig | 1905 Febr. 16. |
| - | *Gabriel Monod* in Versailles | 1907 Febr. 14. |
| - | *Heinrich Nissen* in Bonn | 1900 Jan. 18. |
| - | *Axel Olrik* in Kopenhagen | 1911 April 27. |
| - | *Georges Perrot* in Paris | 1884 Juli 17. |
| - | *Edmond Pottier* in Paris | 1908 Oct. 29. |
| - | *Franz Praetorius* in Breslau | 1910 Dec. 8. |
| - | *Wilhelm Radloff* in St. Petersburg | 1895 Jan. 10. |
| - | *Pio Rajna* in Florenz | 1909 März 11. |
| - | *Moriz Ritter* in Bonn | 1907 Febr. 14. |
| - | *Karl Robert* in Halle a. S. | 1907 Mai 2. |
| - | *Richard Schroeder* in Heidelberg | 1900 Jan. 18. |
| - | *Eduard Schwartz* in Freiburg i. Br. | 1907 Mai 2. |
| - | *Émile Senart* in Paris | 1900 Jan. 18. |
| - | *Eduard Sievers* in Leipzig | 1900 Jan. 18. |
| - | *Henry Sweet* in Oxford | 1901 Juni 6. |
| Sir | *Edward Maunde Thompson* in London | 1895 Mai 2. |
| Hr. | *Vilhelm Thomsen* in Kopenhagen | 1900 Jan. 18. |
| - | *Paul Vinogradoff* in Oxford | 1911 Juni 22. |
| - | *Girolamo Vitelli* in Florenz | 1897 Juli 15. |
| - | *Jakob Wackernagel* in Göttingen | 1911 Jan. 19. |
| - | *Julius Wellhausen* in Göttingen | 1900 Jan. 18. |
| - | *Adolf Wilhelm* in Wien | 1911 April 27. |
| - | *Ludvig Wimmer* in Kopenhagen | 1891 Juni 4. |
| - | *Wilhelm Windelband* in Heidelberg | 1903 Febr. 5. |
| - | *Wilhelm Wundt* in Leipzig | 1900 Jan. 18. |

## Inhaber der Helmholtz-Medaille.

Hr. *Santiago Ramón y Cajal* in Madrid (1904).
- *Emil Fischer* in Berlin (1908).

Verstorbene Inhaber:

*Emil du Bois-Reymond* (Berlin, 1892).
*Karl Weierstraſs* (Berlin, 1892).
*Robert Bunsen* (Heidelberg, 1892).
Lord *Kelvin* (Netherhall, Largs, 1892).
*Rudolf Virchow* (Berlin, 1898).
Sir *George Gabriel Stokes* (Cambridge, 1900).
*Henri Becquerel* (Paris, 1906).
*Jakob Heinrich van't Hoff* (Berlin, 1910).

## Inhaber der Leibniz-Medaille.

*a.* Der Medaille in Gold.

Hr. *James Simon* in Berlin (1907).
- *Ernest Solvay* in Brüssel (1909).
- *Henry T. von Böttinger* in Elberfeld (1909).

*Joseph Florimond* Duc *de Loubat* in Paris (1910).
Hr. *Hans Meyer* in Leipzig (1911).

*b.* Der Medaille in Silber.

Hr. *Karl Alexander von Martius* in Berlin (1907).
- *A. F. Lindemann* in Sidmouth, England (1907).
- *Johannes Bolte* in Berlin (1910).
- *Karl Zeumer* in Berlin (1910).
- *Albert von Le Coq* in Berlin (1910).
- *Johannes Ilberg* in Wurzen (1910).
- *Max Wellmann* in Potsdam (1910).
- *Robert Koldewey* in Babylon (1910).
- *Gerhard Hessenberg* in Breslau (1910).
- *Werner Janensch* in Berlin (1911).
- *Hans Osten* in Leipzig (1911).

Verstorbener Inhaber der Medaille in Silber:

*Georg Wenker* (Marburg, 1911).

## Beamte der Akademie.

Bibliothekar und Archivar der Akademie: Dr. *Köhnke.*
Archivar und Bibliothekar der Deutschen Commission: Dr. *Behrend.*
Wissenschaftliche Beamte: Dr. *Dessau*, Prof. — Dr. *Harms*, Prof. — Dr. *von Fritze.* — Dr. *Karl Schmidt*, Prof. — Dr. Frhr. *Hiller von Gaertringen*, Prof. — Dr. *Ritter.* — Dr. *Apstein*, Prof.

# Gedächtnisrede auf Jacobus Henricus van't Hoff.

Von

H[rn.] EMIL FISCHER.

Gehalten in der öffentlichen Sitzung am 29. Juni 1911.
Zum Druck eingereicht am gleichen Tage, ausgegeben am 17. Juli 1911.

Fast 15 Jahre gehörte Jacobus Henricus van't Hoff unserem Kreise an, als er am 1. März d. J. seine an wissenschaftlichen Großtaten so reiche Laufbahn beschloß.

Seine Berufung von Amsterdam nach Berlin im Winter 1895/96 war ein ungewöhnliches Ereignis; denn seit länger als 100 Jahren hatte die Akademie keinen ausländischen Gelehrten mehr zu ihrem ordentlichen Mitgliede gewählt.

Freunde und Angehörige des Berufenen sind deshalb nicht ganz ohne Sorge gewesen, wie ihm der Wechsel von Wohnsitz, Vaterland und Berufstätigkeit auf die Dauer behagen werde. Aber das feine Gefühl für die Wirklichkeit und ihre Möglichkeiten, das ihn auf seinen wissenschaftlichen Entdeckungsfahrten stets den rechten Weg finden ließ, hat ihn auch bei diesem persönlichen Entschlusse nicht getäuscht. Mitsamt seiner Familie konnte er sich rasch in deutsche Verhältnisse einleben und fand hier einen Wirkungskreis, der seinen Neigungen und Gewohnheiten in jeder Beziehung zusagte. Nicht minder schnell gelang es ihm, durch unermüdliche leidenschaftliche Hingabe an die Wissenschaft, durch aufmerksame Mitarbeit bei den besonderen Aufgaben unserer Akademie, durch einfaches, bescheidenes Wesen und eine tüchtige Dosis gesunden Humors zu der Hochachtung vor seinen Leistungen auch das persönliche Vertrauen und die aufrichtige Zuneigung der Kollegen zu erwerben.

Die Worte warmer Anerkennung, die ich im Auftrage der Akademie seinem Gedächtnis widme, gelten deshalb nicht allein dem großen Naturforscher, sondern ebenso sehr dem lieben Fachgenossen als Dank für jahrelange nie getrübte Freundschaft.

van't Hoff, geboren am 30. August 1852 zu Rotterdam als Sohn eines Arztes, verriet schon in früher Jugend den werdenden Naturforscher

durch Sammeln von Pflanzen und Insekten. Dazu gesellte sich bald die Vorliebe für chemische Experimente, die sogar zu Schaustellungen für Eltern und Kameraden ausgestaltet und durch Erhebung von Eintrittsgeldern auch zu einer Einnahmequelle gemacht wurden. Der in der letzten Maßregel hervortretende Erwerbssinn scheint sich aber nicht entwickelt zu haben, denn alle späteren Berichte bekunden die Neigung, materielle Vorteile der unbedingten Hingabe an Wissenschaft und freie Forschung zu opfern.

Zufolge eines Kompromisses mit dem Vater, der den Sohn am liebsten für die juristische Laufbahn bestimmt hätte, entschloß er sich zwar, Technologe zu werden, und absolvierte zu diesem Zweck erst die höhere Bürgerschule und dann die Polytechnische Schule zu Delft.

Aber ein kurzer Aufenthalt in einer Zuckerfabrik genügte zu der Erkenntnis, daß die manchmal monotone Tätigkeit des Praktikers auf die Dauer seinem spekulativ veranlagten Geiste keine Befriedigung gewähren werde.

In der Antrittsrede, die er vor 15 Jahren am Leibniztage hier hielt, skizzierte er seinen Studiengang mit folgenden Worten: »Für die chemische Technik bestimmt, führte mich mein mathematisches Bedürfnis alsbald nach der Universität Leiden, und ich widmete mich der Mathematik, bis die alte Liebe zur Chemie wieder in den Vordergrund trat und mich ein paar großen Zentren der Strukturchemie zuführte, bei Kekule in Bonn und bei Wurtz in Paris. Dieser doppelte Drang zur Mathematik einerseits und zur Chemie anderseits hat sich dann meinen sämtlichen wissenschaftlichen Bestrebungen aufgeprägt.«

Bei der Wahl von Bonn als Studienort war für den jungen Kandidaten der Wunsch ausschlaggebend, von Kekule, dem berühmten Begründer der Strukturchemie, der seit 1867 eine überaus fruchtbare Lehrtätigkeit an der rheinischen Hochschule ausübte, Aufklärung über gewisse Schwierigkeiten seiner Lehre zu erhalten.

Unter Kekules Anleitung ist dann eine kleine Experimentalarbeit entstanden, die den Inhalt von van't Hoffs erster Publikation »Über eine neue Synthese der Propionsäure« bildete, aber keineswegs aus dem üblichen Rahmen solcher Erstlingsversuche hervortrat. Ungleich größere Wirkung haben sicherlich Kekules Vorlesungen und der Ideenkreis, der im Bonner Institut gepflegt wurde, auf die Entwicklung des jungen Theoretikers gehabt. Er lernte hier die von dem Meister ersonnenen und noch

heute viel gebrauchten Atommodelle, speziell das Modell des Kohlenstoffatoms kennen, und der geometrische Gedanke, der darin liegt, aber von Kekule als verfrüht beiseite geschoben wurde, hat zweifelsohne als Keim bei van't Hoffs stereochemischen Vorstellungen mitgewirkt. Zur Reife sind diese aber erst gelangt nach einem Aufenthalt in Paris, wo er mit dem von Louis Pasteur klar entwickelten Begriff der molekularen Asymmetrie bekannt wurde.

Die Übertragung der Pasteurschen Idee auf die Strukturchemie und das Kekulesche Modell des Kohlenstoffatoms war dann der glückliche Gedanke, durch den der Begriff des asymmetrischen Kohlenstoffatoms und die moderne Stereochemie entstand.

Die erste Veröffentlichung seiner Entdeckung gab van't Hoff im September 1874 durch eine in holländischer Sprache geschriebene Broschüre von nur 11 Seiten, der er im folgenden Jahre eine größere mit dem Titel »La Chimie dans l'Espace« folgen ließ. Hier sind die Folgerungen der neuen Betrachtung auch für komplizierte Fälle mit großer Konsequenz gezogen.

Über die Aufnahme dieser Ideen durch die zeitgenössischen Chemiker begegnet man vielfach der Meinung, daß die meisten sich ablehnend oder doch gleichgültig verhalten haben, selbst nachdem J. Wislicenus einer deutschen Übersetzung des Werkes von Hermann im Jahre 1877 eine warme Empfehlung mit auf den Weg gegeben hatte.

Ich muß dieser Meinung widersprechen, denn ich erinnere mich sehr wohl, wie mein Lehrer Adolf v. Baeyer im Sommer 1875 eines Tages, als ihm van't Hoff die französische Broschüre mit einigen Modellen zugeschickt hatte, im Laboratorium erschien und uns erklärte: »Da ist wirklich mal wieder ein neuer guter Gedanke in unsere Wissenschaft gekommen, der reiche Früchte tragen wird«. Beim Anblick der Modelle und dem Vergleich mit den Strukturformeln der Weinsäure, Fumar- und Maleinsäure waren auch wir Jüngeren sofort in der Lage, uns von der Brauchbarkeit der neuen Theorie zu überzeugen, und sie ist dann vielfach Gegenstand unserer Gespräche gewesen. Ernsten Widerspruch hat sie auch niemals erfahren, denn ein Angriff von H. Kolbe aus dem Jahre 1878, der gleichzeitig gegen Struktur- und Stereochemie gerichtet war und mehr mit groben Witzen als mit sachlichen Gründen operierte, hat in der chemischen Welt sicherlich das Gegenteil von der beabsichtigten Wirkung ausgeübt.

Allerdings dauerte es längere Zeit, bis die Folgerungen der neuen Theorie einer ausgedehnten experimentellen Prüfung unterworfen wurden, bis sie in Mode kam, wie man zu sagen pflegt. Aber die organische Chemie bot zu jener Zeit ohnedies schon eine so große Fülle von Aufgaben, daß alle Hände auf Jahre hinaus beschäftigt waren. Zudem wird die Experimentalforschung nicht, wie mancher denkt, ausschließlich oder vorzugsweise durch die Theorien gelenkt. Ich bin im Gegenteil der Meinung, daß sie mehr von den Methoden und den ihr zur Verfügung stehenden materiellen Hilfsmitteln abhängig ist. Man kann Versuche anstellen ohne jede vorgefaßte Meinung, sobald man Instrumente und Materialien zur Hand hat, und mancher ausgezeichnete Naturforscher ist allen Theorien zum Trotz ausgezogen auf freie Entdeckungsfahrt, ähnlich einem Jagdhund, nur seiner Nase folgend, wie es der Chemiker Priestley im 18. Jahrhundert seinen Fachgenossen dringend empfohlen hat.

Aber sobald es sich um systematische Bearbeitung großer Gebiete und um die bequeme Ordnung zahlreicher Beobachtungen handelt, sind die Theorien ebenfalls unentbehrlich. Das hat sich auch bei der Stereochemie gezeigt. Ihr Nutzen trat immer deutlicher zutage, als die organischen Chemiker sich entschlossen, die schwierigen Kapitel der Terpene, der hydroaromatischen Substanzen, der Kohlenhydrate, der Proteine, wo es sich um zahlreiche feine Isomerien und meistens um optisch aktive Substanzen handelt, systematisch zu studieren.

Was van't Hoff an der Hand seines Modells auch für solche komplizierten Fälle inbezug auf Konfiguration, optisches Drehungsvermögen, Anzahl der Formen usw. vorausgeschaut, ist dann in geradezu staunenerregender Weise bestätigt worden.

Von dem ursprünglichen Gedanken, die Strukturchemie ins Sterische überzuleiten, kann man wohl sagen, daß er in der Luft gelegen habe; denn J. Wislicenus ist energisch dafür eingetreten, und A. v. Baeyer hat mir öfters erzählt, daß er 4 Jahre vor van't Hoffs Publikation mit dem Kekuleschen Modell die Moleküle der von ihm entdeckten isomeren Hydromellithsäuren ganz im Sinne der heutigen Stereochemie aufgebaut, aber nicht den Mut gehabt habe, die Zeichnungen seiner Abhandlung über diese Körper einzureihen.

Selbst die Idee des asymmetrischen Kohlenstoffatoms ist gleichzeitig in einem anderen Kopf, bei dem französischen Chemiker J. A. Le Bel, ent-

standen und ebenfalls so geschickt verwertet worden, daß er mit vollem Recht als Mitbegründer der Stereochemie gilt. Niemand hat das mehr anerkannt als van't Hoff selbst, der sogar eine spätere Auflage seiner Schrift Hrn. Le Bel widmete. Von Le Bel sind auch wertvolle Versuche zur experimentellen Prüfung des Gedankens angestellt worden, und ihm verdanken wir ferner die kühne Ausdehnung der Spekulation auf die asymmetrischen Stickstoffverbindungen.

Aber worin van't Hoff unbestritten voransteht, das ist die außerordentlich sorgfältige und ausdauernde Durchmusterung aller Beobachtungen auf dem weiten Gebiete der optisch aktiven, der ungesättigten und der zyklischen Verbindungen, im Lichte seiner Theorie, deren Ausbau ihn bis in die letzten Lebensjahre beschäftigte.

Am meisten hat mich dabei immer die seltene Vereinigung von kühner Spekulation mit vorsichtiger Kritik überrascht, denn van't Hoff ist stets dort stehengeblieben, wo der tatsächliche Untergrund schwankend wurde und überließ es anderen, die Grenzen zu überschreiten, wo die Hypothese mit den Tatsachen in Widerspruch kommen konnte. Nur so ist es möglich gewesen, daß kaum eine seiner Voraussagungen zurückgenommen werden mußte, und erst in allerletzter Zeit haben sich Erscheinungen gezeigt, die eine kleine Abänderung seiner Vorstellungen nötig machen.

Wenige Monate nach dem Erscheinen der ersten Schrift über die Stereochemie erwarb van't Hoff im Alter von 22 Jahren zu Utrecht den Doktortitel, aber merkwürdigerweise nicht für Chemie, obschon eine kleine Experimentaluntersuchung über Cyanessigsäure und Malonsäure den Inhalt seiner Dissertation bildete, sondern für Mathematik und Physik. Vielleicht hat die Fakultät zu Utrecht damit der wohlberechtigten Hoffnung Ausdruck geben wollen, daß der junge Doktor diese Wissenschaften noch mit größerem Erfolge in den Dienst der Chemie stellen werde, als es bereits durch die stereochemischen Betrachtungen geschehen war.

Nach der Promotion begann die Sorge um den Erwerb einer passenden Lebensstellung, die aber erst zwei Jahre später durch die Anstellung als Dozent an der Tierarzneischule zu Utrecht ihre Lösung fand. In der Zwischenzeit befriedigte er seine bescheidenen materiellen Lebensansprüche durch Erteilung von Privatunterricht.

Trotz dieser lästigen Nebenbeschäftigung war es für ihn eine Periode intensivster geistiger Arbeit, deren Früchte zum Teil in dem zweibändigen

Werk »Ansichten über organische Chemie« niedergelegt sind. Obschon dieses Buch nicht entfernt den Einfluß auf unsere Wissenschaft ausübte wie die »Lagerung der Atome im Raum«, so bildet es doch ein unentbehrliches Glied in der Kette von Gedanken, die van't Hoff aus dem engeren Bereiche der Kohlenstoffverbindungen in die allgemeine Chemie hinausführten.

Ausgehend von dem Wunsche, den Verlauf organisch chemischer Vorgänge nicht allein von der qualitativen Seite, sondern auch nach der Quantität und dem zeitlichen Verlauf kennen zu lernen, sah er sich gezwungen, das Problem der chemischen Dynamik anzugreifen

Wilhelm Ostwald hat uns in der trefflichen Gedächtnisrede bei der von der Chemischen Gesellschaft veranstalteten Feier vor sechs Wochen erzählt, wie van't Hoff selbst diesen Teil seiner Gedankenentwicklung im heiteren Kreise schilderte.

Angeregt durch einen Besuch des Kaisers von Brasilien, Dom Pedro, hatte er den Plan gefaßt, seine Theorie durch eine umfassende Untersuchung der Dibrombernsteinsäure zu prüfen.

Aber die Reaktionen verliefen anders, als er sich gedacht, und die Arbeit blieb liegen, wie man jetzt sagen darf, zum Glück für van't Hoff, der hier vielleicht in dieselben Trugschlüsse gekommen wäre, deren Opfer später andere geworden sind. Indessen fiel ihm bei den mißlungenen Versuchen auf, daß die Abspaltung des Bromwasserstoffs beim Kochen der wäßrigen Lösung ein langsam verlaufender und deshalb zeitlich meßbarer Prozeß ist. So kam er darauf, sich mit der Reaktionsgeschwindigkeit und bald nachher auch mit den chemischen Gleichgewichten zu beschäftigen.

Inzwischen war er 1877 an die neu gegründete Universität Amsterdam als Lektor berufen und ein Jahr später zum Professor der Chemie, Mineralogie und Geologie befördert worden.

Der größere Kreis von Schülern und die reichlicher fließenden materiellen Hilfsmittel haben ihm hier die Möglichkeit gegeben, eine fruchtbare Lehrtätigkeit zu entfalten und gleichzeitig seine theoretischen Betrachtungen durch eine Reihe von Experimentalarbeiten zu prüfen. Das Ergebnis dieser umfassenden Untersuchungen ist niedergelegt in den 1884 erschienenen »Études de Dynamique chimique«, die 12 Jahre später von Ernst Cohen unter dem Titel »Studien zur chemischen Dynamik« von neuem herausgegeben wurden.

Aus dem reichen Inhalt des Buches seien hier nur erwähnt die scharfe Definition der Reaktionsgeschwindigkeit und deren Abhängigkeit von der Temperatur, der Begriff des beweglichen Gleichgewichts und der Umwandlungstemperatur, die thermodynamische Berechnung der chemischen Affinität und die Kritik des Berthelotschen Satzes von der maximalen Arbeit.

Obschon manche seiner Betrachtungen nicht ganz neu waren, so kann doch die Wirkung, welche das Werk auf die chemische Dynamik ausübte, dem Einfluß der Stereochemie auf das Studium der Kohlenstoffverbindungen gleichgesetzt werden; denn van't Hoff hat die neuen Begriffe im Gegensatz zu Gibbs, dem wir ganz ähnliche Studien vom mathematischen Standpunkt aus verdanken, im unmittelbaren Anschluß an die Wirklichkeit gefunden, und ihre Fruchtbarkeit an einem großen experimentellen Material dargelegt.

Allerdings sollen seine mathematischen Ableitungen nach dem Urteil der Sachverständigen nicht immer streng den Regeln der Kunst genügen. Um so bewundernswerter ist seine Intuition, die ihn trotzdem stets zum richtigen und meist durch Einfachheit ausgezeichneten Endresultat führte.

Die Bearbeitung des Affinitätsproblems, das mit der Gleichgewichtslehre im engen Zusammenhang steht und deshalb den Gegenstand der letzten Kapitel der »Études de Dynamique chimique« bildet, hat van't Hoffs dritte und größte Entdeckung, die Theorie des osmotischen Drucks und der Lösungen, zur Folge gehabt. In dem für die Kenntnis seiner Ideenentwicklung so wichtigen Vortrag vor der hiesigen chemischen Gesellschaft im Dezember 1893 erzählte er selbst mit charakteristischen Wendungen, wie jene Lehre entstanden ist.

Durch seinen botanischen Kollegen an der Universität Amsterdam, de Vries, war er mit den Messungen des osmotischen Drucks durch den Pflanzenphysiologen Pfeffer bekannt geworden und hatte sie alsbald benutzt, um die Anziehung des Wassers durch Salze, z. B. Natriumsulfat, zahlenmäßig festzustellen.

Als er dann ferner versuchte, eine für gasförmige Systeme von ihm abgeleitete thermodynamische Gleichung auch für verdünnte Lösungen anzuwenden, kam ihm der glückliche Einfall, daß mit dem dort benutzten Begriff der halbdurchlässigen Wand bei Lösungen die reversiblen Umwandlungen ebenfalls durchführbar sind. Aus diesem Gedanken ergab sich zunächst die Übertragung der Gasgesetze von Boyle und Gay-Lussac auf

die verdünnten Lösungen. Noch viel überraschender war das Resultat, als der Wert $R$ in der bekannten Gasgleichung mit dem osmotischen Druck für verdünnte Zuckerlösungen berechnet und gleich groß gefunden wurde.

Die physikalische Deutung des Resultates hieß aber: »Nichts anderes, als daß der Zucker einen osmotischen Druck ausübt, demjenigen Druck gleich, welchen er bei derselben Konzentration und Temperatur im gasförmigen Zustande ausüben würde«. Die daraus folgende Anwendbarkeit von Avogadros Satz auf Zuckerlösungen erschien dem Entdecker zuerst als Zufall. Als er aber seine Betrachtungen auf die von Raoult gefundenen Gesetzmäßigkeiten für die Erniedrigung von Dampfdruck und Gefrierpunkt bei Lösungen ausdehnte, ergab sich eine überraschende Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung.

Trotzdem übergab der vorsichtige Forscher seine Resultate erst im Oktober 1886 durch eine der schwedischen Akademie vorgelegte Abhandlung der Öffentlichkeit, nachdem die von ihm aus Raoults Zahlen berechnete Schmelzwärme des Bromäthylens auf seine Bitte durch Petterson experimentell geprüft und bestätigt worden war.

Welch verblüffenden Eindruck van't Hoffs geniale Theorie auf die zeitgenössischen Chemiker machte, kann ich aus eigener Erfahrung bezeugen. Ich wurde zufällig bald nach dem Erscheinen der schwedischen Abhandlung im Frühjahr 1887 damit bekannt gemacht durch den Mann, der am meisten zu ihrer Förderung beigetragen hat, durch Svante Arrhenius. Er arbeitete damals unter Leitung von Friedrich Kohlrausch im physikalischen Laboratorium der Universität Würzburg und war häufiger, gern gesehener Gast im chemischen Institut. Eines Tages erschien er dort, um mir über die van't Hoffsche Untersuchung zu berichten. Mit berechtigter Freude konnte er zufügen, daß es ihm gelungen sei, die Abweichung mancher Stoffe von jenen Gesetzen zu erklären. Es handle sich dabei stets um Elektrolyte, von denen er annehme, daß sie durch den Lösungsvorgang in die Ionen dissoziiert würden und nach dem Grade der Dissoziation, der durch das elektrische Leitvermögen zu messen sei, größeren osmotischen Druck zeigen müßten.

Obschon die Betrachtungen meinem eigenen Arbeitsfelde ferne lagen, so konnte ich mich doch nicht der Überzeugung verschließen, daß man es hier mit einem neuen, großartigen Einblick in das weite Gebiet der Lösungen zu tun habe. Ich bin dann mit der Mehrzahl der Fachgenossen

der weiteren Entwicklung dieser Theorie, wenn auch aus der Ferne, so doch mit aufrichtiger Freude, gefolgt, obschon gelegentlicher Mißbrauch derselben von seiten allzu eifriger Anhänger zum Widerspruch reizen konnte.

Die Verbreitung der neuen Lehre ist außerordentlich gefördert worden durch die 1887 gegründete Zeitschrift für physikalische Chemie, die unter der Leitung von Wilhelm Ostwald und der dauernden Mitwirkung van't Hoffs bald der Sammelpunkt für alle Arbeiten auf diesem Gebiete wurde. Enthielt doch schon ihr erster Band die ausführliche Darlegung der Lösungstheorie durch van't Hoff und die erste zusammenfassende Darstellung der elektrolytischen Dissoziationstheorie von Arrhenius.

Die zunächst nur für Flüssigkeiten geltende Betrachtung konnte von van't Hoff schließlich auch auf die Mischungen fester Körper und auf die in festen Substanzen absorbierten Gase übertragen werden. So entstand der wichtige Begriff der festen Lösungen.

Trotz vereinzelten Widerspruchs hat die Theorie des osmotischen Drucks schneller als die Stereochemie befruchtend auf die Experimentalforschung eingewirkt. Der Grund dafür liegt wohl in ihrer viel allgemeineren Bedeutung und der Möglichkeit, sie auf den verschiedensten Gebieten der Chemie und Physik durch die Beobachtung zu prüfen. Welch unermeßlicher Strom von Anregung daraus hervorgegangen ist, zeigt das plötzliche Anschwellen der physikalisch-chemischen Literatur.

Daß den ungewöhnlichen Leistungen van't Hoffs nicht allein die Anerkennung der engeren Fachgenossen, sondern auch der verschiedensten gelehrten Korporationen in reichem Maße zuteil wurde, versteht sich von selbst. Am bekanntesten davon ist die Verleihung des Nobelpreises im Jahre 1901, wo van't Hoff als erster Chemiker diese Ehrung erhielt.

Ebensowenig braucht man sich zu wundern, daß auch außerhalb seines Vaterlandes der Wunsch rege wurde, ihn als Lehrer und wissenschaftliche Zierde für Hochschulen zu gewinnen. Bereits im Jahre 1887 hatte Leipzig einen solchen Versuch gemacht, was man in Amsterdam mit der Bewilligung eines neuen Institutes beantwortete. Dasselbe wurde ganz nach den Angaben van't Hoffs gebaut und 1891 in Betrieb genommen. Damit waren wohl alle Wünsche, die er in bezug auf äußere Hilfsmittel für seine Arbeiten hegte, erfüllt, und der große internationale Schülerkreis, der sich um ihn versammelte, sorgte auch dafür, daß die neuen Einrichtungen im Dienste der Wissenschaft gründlich ausgenutzt wurden. Aber mit dem

vergrößerten Institut waren für den Leiter auch die Sorgen der Verwaltung und des Unterrichts gewachsen.

Der Konflikt zwischen den Neigungen des Forschers und den Pflichten des Lehrers, den auch mancher andere Gelehrte zu bestehen hat, trat bei ihm besonders scharf hervor und erweckte den Wunsch nach weitgehender Befreiung von den Amtsgeschäften, der ihm allerdings im Rahmen der Amsterdamer Universitätseinrichtungen nicht erfüllt werden konnte. Die Kunde davon verbreitete sich in Deutschland und hat schließlich die Übersiedelung van't Hoffs nach Berlin zur Folge gehabt. Allerdings mißlang der Versuch, ihn für unsere Universität zu gewinnen. Durch den Tod von Kundt und Helmholtz, deren Verlust wir kurz nacheinander zu beklagen hatten, war 1894 die Experimentalphysik verwaist und nachdem der anfänglich für die Universität in Aussicht genommene Friedrich Kohlrausch als Präsident der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt ausersehen war, tauchte der Gedanke auf, für den Lehrstuhl der Physik an der Universität van't Hoff zu berufen. So ungewöhnlich dieser Vorschlag auch in mancher Beziehung sein mochte, so wurde er doch von der Unterrichtsverwaltung ohne Zögern angenommen und Hr. Planck als erster Unterhändler nach Amsterdam geschickt. Die Folge war ein Gegenbesuch von van't Hoff in Berlin, wo es zu eingehenden Verhandlungen mit der Behörde kam. Bei diesen zeigte der Gelehrte so viel kluge Überlegung, zähe Ausdauer und unerschütterliche Ruhe, daß der vielgewandte Vertreter des Kultusministeriums Friedrich Althoff in den bewundernden Ruf ausbrach »Dieser Holländer ist mir über«.

Obschon van't Hoff uns gegenüber seine besondere Freude über die ehrende Anerkennung seiner physikalischen Vollwertigkeit und über das weite Entgegenkommen der Unterrichtsverwaltung ausgesprochen hatte, so lehnte er doch sofort nach der Heimkehr das Anerbieten ab. Offenbar hatte er das Gefühl, sich mit den Anforderungen der Experimentalphysik und den vielfältigen Geschäften einer Berliner Professur noch weniger befreunden zu können, als ihm dies in Amsterdam auf die Dauer mit der chemischen Professur gelungen war. Aber die Fäden zwischen ihm und Berlin waren nun einmal geknüpft, und schon während seines hiesigen Aufenthaltes hatte man die Möglichkeit einer späteren Berufung durch die Akademie im engeren privaten Kreise erwogen. Er ließ keinen Zweifel darüber, daß eine von allen Nebenpflichten befreite Tätigkeit am meisten

seinen Neigungen entspräche, und einige Monate später im April 1895 nahm er als Vorsitzender der Versammlung holländischer Naturforscher und Ärzte zu Amsterdam Gelegenheit, auch öffentlich für die Schaffung derartiger Stellen einzutreten. Noch drastischer brachte er kurz nachher seine Überzeugung zum Ausdruck, indem er die Amsterdamer Professur plötzlich aufgab, um zunächst der Ruhe zu pflegen. Mit der Familie zog er erst in den badischen Schwarzwald und dann, als die Tage kürzer wurden, langsam der Sonne nach bis Lugano, alles mit Ausnahme des Gotthardtunnels zu Fuß abmachend, Omnia sua secum portans, wobei der jüngste, erst sechsjährige Sohn meist auf den Schultern des Vaters reiten durfte. Was Seume vor 100 Jahren mit dem Spaziergang nach Syrakus vollbracht, das hat van't Hoff im Zeitalter der Eisenbahnen nochmals geleistet, auch nach Kilometern, wenn man den Weg mit der Zahl der sechsköpfigen Familie multipliziert.

Von der Schweiz knüpfte er die Verhandlungen mit Berlin wieder an, und nun erfolgte nach dem einmütigen Vorschlag der Fachgenossen im Winter 1895/96 seine Berufung als Mitglied der Akademie. Gleichzeitig wurde er zum Honorarprofessor an der Universität ernannt, und im Frühjahr 1896 fand die Übersiedlung nach Berlin statt.

Glücklicherweise brauchte van't Hoff kein großes Institut, das man so rasch nicht hätte herrichten können. Für die von ihm geplanten Untersuchungen genügte ein kleines Laboratorium, für dessen Einrichtung in einem Mietshause sein Freund und Mitarbeiter Meyerhoffer Sorge trug.

Und nun beginnt die lange Reihe von Experimentalarbeiten über die ozeanischen Salzablagerungen, speziell die Staßfurter Salze, welche an die bereits in Amsterdam angestellten Versuche über Umwandlungserscheinungen und Doppelsalzbildung anknüpfen. In 52 Abhandlungen, die sämtlich in unseren Sitzungsberichten erschienen, sind die Resultate niedergelegt, durch die das verwickelte Problem in den Grundzügen und für eine konstante Temperatur gelöst wurde.

Drei Jahre vor seinem Tode hat er sie abgeschlossen, aber gleichzeitig für ihre Weiterführung von anderer Hand Sorge getragen.

Unter Mitwirkung von Mineralogen, Geologen und Chemikern der Staßfurter Industrie und mit materieller Unterstützung durch unsere Akademie, den Verein deutscher Ingenieure und das Kalisyndikat ist ein wissenschaftlicher Verband für die Erforschung der deutschen Kalisalzlagerstätten ins

Leben getreten, der auch die weitere physikalisch-chemische Bearbeitung des Gebietes auf dem von van't Hoff gebahnten Wege betreiben wird.

Das Studium der Kalisalze ist an Umfang zweifellos die größte Experimentalarbeit van't Hoffs, und der theoretischen Durchdringung des Problems steht hier ebenbürtig die unermüdliche, über 12 Jahre sich erstreckende Sammlung der Beobachtungen zur Seite. Manche interessante geologische Frage wird dabei berührt und zugleich die Synthese von Mineralien durch die erste künstliche Bereitung von mehreren Staßfurter Salzen bereichert.

Zu dem Ruhm des schöpferischen Theoretikers gesellt sich nun auch der Lorbeer des geschickten, sorgfältigen und ausdauernden Experimentators.

Manche seiner Freunde haben die Berliner Periode als eine Zeit der Ruhe oder wohl gar der Erschöpfung angesehen, die nach den vorausgegangenen theoretischen Leistungen begreiflich gewesen wäre. Aber könnte es nicht auch umgekehrt so sein, daß das von van't Hoff früher bearbeitete Gebiet gerade durch seine Entdeckungen erschöpft war? Wo die naturwissenschaftliche Spekulation ernten will, muß der Acker zuvor durch die Beobachtung vorbereitet sein, und je gründlicher der theoretische Schnitter sein Werk besorgt hat, um so länger dauert es, bis wieder neue Früchte heranreifen. Tatsächlich ist seit zwei Dezennien, wenn man von der Radioaktivität absieht, keine Theorie in der Chemie aufgetaucht, die den zuvor erwähnten van't Hoffschen Ideen an Einfachheit und allgemeiner Gültigkeit gleichgestellt werden könnte. Wahrscheinlich hat er diesen Zustand der Wissenschaft richtig empfunden und sich zum Experiment, dem Jungbrunnen des Naturforschers, geflüchtet, ähnlich dem alternden Faust, der von der Spekulation übersättigt, sich nach den Brüsten der ewig jungen Natur zurücksehnt.

Wie wenig durch die scheinbare Ruhe seine Unternehmungslust vermindert war, lehrt der letzte Abschnitt seiner wissenschaftlichen Arbeit. Trotz vorgeschrittenen Alters und den Plagen einer tückischen Krankheit faßte er vor einigen Jahren den kühnen Entschluß, sich den Grundproblemen der Biologie, insbesondere der Bildung organischer Materie in den Pflanzen, zuzuwenden. Zwei Veröffentlichungen in unseren Sitzungsberichten »Über synthetische Fermentwirkung« zeigen den Weg an, den er zu beschreiten gedachte.

Um für die Versuche frisches Pflanzenmaterial zur Hand zu haben und gleichzeitig die für seinen körperlichen Zustand unzuträgliche Großstadtatmosphäre zu vermeiden, hatte er Wohnsitz und Arbeitsstätte nach dem Vorort Steglitz verlegt. Das Laboratorium war noch bescheidener als das mit Meyerhoffer benutzte. Es bestand aus einem kleinen Holzhaus mit sehr einfacher Einrichtung, das er auf dem Gelände der Domäne Dahlem aus eigenen Mitteln erbaut hatte. Die Erwerbung des Bauplatzes, wofür eine kleine Miete gezahlt werden mußte, war nicht mühelos gewesen, und die Form, wie sie zum Abschluß kam, ist so charakteristisch, daß sie verdient, erzählt zu werden. Nach vorbereitenden mündlichen Verhandlungen hatte van't Hoff ein schriftliches Gesuch an die maßgebende Behörde um mietweise Überlassung des Platzes gerichtet, aber mehrere Monate vergeblich auf Antwort gewartet. Da wiederholte er die Eingabe, schickte sie aber diesmal als eingeschriebenen Brief mit Eilbestellung nach dem nahen Bestimmungsort. Diese ungewöhnliche dringliche Form verfehlte ihre Wirkung nicht, und nach einigen Tagen war sein Wunsch erfüllt.

Leider sollte ihm keine ungestörte Benutzung der neuen Arbeitsstätte mehr beschieden sein. Das vor $4\frac{1}{2}$ Jahren erworbene Lungenleiden zwang ihn wiederholt zu längerer Unterbrechung der Versuche, und bald nach dem Jubiläum unserer Universität, wo er nur noch am Festmahl im Königlichen Schlosse teilnahm, trat die zum Ende führende Verschlimmerung der Krankheit ein.

In der letzten Festsitzung am Friedrichstage hat unsere Akademie ihm nur wenige Wochen vor seinem Tode die letzte öffentliche Ehrung durch die Verleihung der Helmholtzmedaille erwiesen, die er nach dem Zeugnis der treuen Gattin auf dem Krankenlager, aber mit dankbarer Freude empfing.

Wenn ich schließlich van't Hoffs Leistungen als Ganzes kennzeichnen soll, so trage ich kein Bedenken, ihn den größten Theoretiker der Chemie in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts zu nennen. Durch die Stereochemie hat er seinen Namen neben den von Pasteur und Kekule gesetzt. Mit den Studien zur chemischen Dynamik war er an die Seite der großen Thermodynamiker, insbesondere von Helmholtz und Gibbs getreten, und mit der Lehre vom osmotischen Druck hat er dem Gedanken Avogadros die allgemeine Bedeutung verschafft.

Die Originalität, die seinem Denken eigen war, trat auch in seinen Gewohnheiten, Neigungen und Anschauungen zutage und gab dem Verkehr

mit ihm einen besonderen Reiz. Bescheidenheit inbezug auf die eigene Leistung, freudige Anerkennung fremden Verdienstes, Abneigung gegen Polemik und Phrase, drolliger Humor und Einfachheit der Lebensführung bildeten die Grundzüge seines Wesens.

So wird er fortleben nicht allein in der Geschichte der Wissenschaft als der schöpferische Denker, den wir stolz waren, so lange den unsrigen nennen zu dürfen, sondern auch in der Erinnerung der Freunde als der liebenswerte Mensch, dessen Verlust wir lebhaft beklagen.

# Über den anatomischen Bau der baumartigen Cyperacee Schoenodendron Bücheri Engl. aus Kamerun.

Von

HH. A. ENGLER und Dr. K. KRAUSE.

Vorgelegt in der Sitzung der phys.-math. Klasse am 4. Mai 1911.
Zum Druck eingereicht am gleichen Tage, ausgegeben am 19. Juni 1911.

Bisher kannte man keine Cyperacee mit hohem oberirdischem, baumartig verzweigtem Stamm, wie er bei den Pandanaceen, einigen Liliaceen, Amaryllidaceen und auch den Velloziaceen vorkommt.

Zwar gibt es eine Gattung *Scirpodendron*, bei welcher man auf Grund des Namens eine baumartige Verzweigung vermuten könnte; aber deren einzige Art *Sc. costatum* Kurz, welche von Ceylon durch die südwestmalaiische Provinz (Malakka, Java) bis zum tropischen Ostaustralien und Samoa verbreitet ist, besitzt nach C. B. Clarke's Angaben in Hookers Flora von Britisch-Indien (Bd. VI, S. 684) einen einfachen bis 6 cm langen, von einem holzigen Rhizom aufsteigenden weichen, oben dreikantigen Stamm von 5 mm Durchmesser, welcher 2—3 m lange Blätter trägt, und ähnelt einem niedrigen *Pandanus*.

Anders verhält sich die im Gebiet des Rio Negro in der Hylaea vorkommende Cyperacee *Cephalocarpus dracaenula* Nees. Hier ist ein einfacher oder einmal gegabelter, nur 2—2.5 dcm langer oberirdischer Stamm vorhanden, welcher einen Schopf von schmalen Blättern trägt und von oben bis unten mit zerfaserten Blattresten bedeckt ist, zwischen welchen zahlreiche dünne Wurzeln hervorbrechen. Bei der ebenfalls brasilianischen *Fimbristylis restioides* Nees haben wir 1.5 dcm hohe dichte Polster, welche von einem über die Erde tretenden, verzweigten, dicht beblätterten Stamm gebildet sind.

Viel auffallender ist eine in Kamerun vorkommende Cyperacee, von welcher schon im Jahre 1905 einzelne kleine Stämmchen nach Berlin gelangten, im vergangenen Jahr aber recht kräftige und vollkommener entwickelte Exemplare eingesendet wurden. Die ersten Exemplare stammten

Hr. Dr. K. Krause, Assistent am Kgl. Botanischen Museum in Dahlem, hat die für diese Untersuchung nötigen anatomischen Präparate angefertigt.

vom Cross-Fluß im nordwestlichen Kamerun und waren von Regierungsrat Dr. Meyer gesammelt, die im Jahre 1910 eingesendeten vollständigeren Exemplare stammten von Jaunde aus einer Höhe von 800 m, woselbst sie Dr. Bücher auffand.

Die Pflanze bewohnt wie die im sterilen Zustande habituell ähnlichen *Vellozia* und *Barbacenia* trockene Felsen und kommt auf solchen gesellig vor. Am Grunde des Stammes finden wir zahlreiche ringsum sich ausbreitende Bodenwurzeln. Der Stamm ist unten etwa 5 cm dick, bis zu etwa 12 cm Höhe nicht verzweigt, dann aber wiederholt, zumeist dichotomisch, mit etwa 8—10 cm langen Gliedern, von denen die obersten noch 1 cm dick erscheinen und einen Schopf von aufrechten starren lineallanzettlichen bis 5 cm langen, am Grunde 3 mm breiten Blättern tragen. Mit Ausnahme des alleruntersten Teiles, an dem die Blattreste abgestoßen sind, finden wir den Stamm und alle Äste von dicht stehenden, spiralig angeordneten Blattbasen bedeckt (Fig. 1). An den Exemplaren vom Cross-Fluß finde ich die Spiralstellung 8/13.

Mehrfach sieht man an den Gabelungen Reste der Blütenstengel, mitunter auch scheinbar seitlich an den Ästen. Jedenfalls entwickeln sich wie bei *Dracaena* Äste immer nur unterhalb eines Blütenstandes (Fig. 2 *A*). Der Blütenstand ist eine bis 3 dcm lange, mehrfach verzweigte Rispe, deren Zweige dritter oder vierter Ordnung an sehr dünnen Stielen cymöse Scheinähren von 7—12 einblütigen Ährchen tragen. Die primären Brakteen der Scheinähren sind pfriemlich und nur 1—1.5 mm lang. Von den einblütigen Ährchen ist jedes zunächst mit drei sehr ungleichen 2, 3 und 3.5 mm langen äußeren Brakteen versehen, auf welche 3—5 winzige nur 0.3 mm lange, langbehaarte Schüppchen folgen, welche das etwa 4 mm lange Pistill einschließen, dessen länglicher Fruchtknoten in einen langen fadenförmigen Griffel mit 2, seltener mit 3 fadenförmigen Narben übergeht. Die Früchte erreichen schließlich eine Länge von 7—8 mm. Pflanzen mit männlichen Blüten habe ich bisher nicht erhalten können, und es ist daher die folgende Gattungsdiagnose wie auch diejenige der Art noch etwas unvollständig.

***Schoenodendron*** Engl. in Englers Bot. Jahrb. XLIV (1910) Beiblatt Nr. 101.

Flores dioeci. Flores masculi adhuc ignoti. Flores feminei in spicula solitarii, an nudi? bracteis 2 majoribus lanceolatis et 3—5 minimis, pilis

duplo longioribus ciliatis inclusi, an perigoniati? tepalis 3—5 minimis pilis duplo longioribus instructi. Pistillum valde elongatum conoideum superne curvatum, stigmatibus 2—3 filiformibus instructum. Fructus elongato-conoideus superne curvatus, semen elongatum cylindricum includens. — Arbuscula, ramis plerumque pseudodichotomis, interdum trifidis, fere a basi ad apicem usque foliorum partibus basalibus obtectis. Folia dense spiraliter ordinata angusta lineari-lanceolata, e basi ad apicem usque angustata. Inflorescentiae paniculatae folia superantes; bracteae I et II basi longe tubulose vaginantes atque in subulam acutissimam exeuntes, ramulos 2—4 tetrangulos includentes, ramulis extimis pseudospicas e pseudospiculis uniflоris compositas gerentibus; bracteae pseudospicae subulatae vel anguste lanceolatae acutae quam spiculae bracteae primariae lanceolatae breviores.

***Sc.*** *Bücheri* Engl. n. sp.; arbuscula circ. 6 dcm alta, radicibus tenuibus numerosissimis trunco parallelis foliorum vaginas perforantibus usque ad basin trunci progredientibus et hic radices secundarias horizontaliter radiantes emittentibus. Truncus usque 12 cm longus, inferne foliorum vestigiis destitutus circ. 5 cm crassus, ramis adscendentibus, gradatim minoribus, extimis cum foliorum vestigiis 1.5 cm, sine foliis 1 cm crassis, fere omnibus supra bifurcationes pedunculi vestigio 3—6 cm longo, 2—3 mm crasso persistente instructis. Folia erecta, rigida, lineari-lanceolata usque 5 cm longa, vestigia vetusta circ. 1—1.5 cm longa, ramis adpressa, apice patente vel recurvo. Paniculae usque 2 dcm longae, ramis I 2 mm crassis; bracteae I vagina tubulosa 1.5 cm longa instructae in acumen aequilongum subuliforme exeuntes; ramuli II 3—5 cm longi, bracteas superantes, pseudospicae circ. 8 mm longae; bracteae earum circ. 1—1.5 mm longae; bracteae 3 inferiores spicularum 2 usque 6 mm longae; bracteae minimae pistillo antecedentes (an perigonii tepala?) vix 0.5 mm longae. Pistillum cum stilo usque 4 mm longum; stigmata filiformia 1 mm longa. Fructus 6 mm longus, inferne 0.5 mm crassus.

Kamerun: auf einer Gneiskuppe in der Nähe von Jaunde am Rande des Regenwaldes, um 780—820 m ü. M. (Dr. Bücher — ♀ blühend und fruchtend im Juni 1909); am Cross-Fluß auf Felsen (Regierungsrat Dr. Meyer — August 1904).

Die Schüppchen unterhalb des Pistills könnte man als eine hochblattartige Blütenhülle auffassen; es ist aber auch die Deutung zulässig, daß

*Fig. 1.*

*Schoenodendron Bücheri* Engl., von Jaunde (800 m ü. M.), etwas über $\frac{1}{3}$ der nat. Größe.

*Fig. 2.*

*Schoenodendron Bücheri* Engl., von Cross River in Kamerun, etwa $\frac{1}{2}$ nat. Größe. *A* ein Ast, welcher sich unterhalb eines terminalen Blütenstandes verzweigt; auf dem Längsschnitt treten die unter den Blättern verlaufenden Adventivwurzeln hervor. *B* ein Ast mit dem Rest eines Blütenstandes und zwei entwickelten Blütenständen.

diese Schüppchen Hochblätter sind und daß das nackte Pistill allein die weibliche Blüte repräsentierend in der Achsel eines der Schüppchen steht. Jedenfalls tun wir gut, die definitive Entscheidung über die Auffassung dieser Blattgebilde bis zum Bekanntwerden der männlichen Blüten offen zu lassen. Es gehört diese interessante Pflanze zu den *Rhynchosporoideae*, welche durch wenigblütige Blütenstände, die selbst wieder in ährigen oder kopfigen Gesamtblütenständen stehen, ausgezeichnet sind, und zwar in die engere Gemeinschaft der *Scleríeae*, bei denen eingeschlechtliche Scheinährchen vorhanden sind und die weiblichen nur eine Blüte enthalten. Die Pflanze kann zu keiner der bisher bekannten Gattungen gebracht werden. Von *Cephalocarpus*, welcher sie habituell am nächsten kommt, ist sie schon dadurch unterschieden, daß der Griffel am Grunde nicht zwiebelartig verdickt ist. Daß sie habituell durch die weitgehende bäumchenartige Entwicklung alle anderen Cyperaceen übertrifft, ist schon aus dem Habitusbild ersichtlich. Das Auffallendste ergibt sich aber beim Durchschneiden der Äste; dann sieht man, daß an denselben, auch an den obersten, 5—6 dcm über dem Boden befindlichen, um den 5 mm dicken Stengel herum und von den Blattbasen bedeckt 2—3, manchmal auch 4 Schichten von parallel der Stengeloberfläche senkrecht nach unten verlaufenden Wurzeln vorhanden sind. Diese Wurzeln entspringen an den Stengelgliedern in verschiedener Entfernung von deren Basis und wachsen durch die Scheidenteile der Blätter hindurch, welche hierbei zerfasert werden; einige Lagen dieser Wurzeln bilden um den Stengel einen Mantel, dessen Dicke derjenigen des ersteren beinahe gleichkommt (Taf. I, Fig. *A*). Die Wurzeln, welche an den oberen Ästen nur wenig Nebenwurzeln entwickeln, sind an den unteren Stammteilen reich verzweigt und bilden einen dichten Filz, der aber immer von oben an bis zur ersten Gabelung des Stammes von den stehengebliebenen Blattresten bedeckt ist. Erst an dem untersten 10—15 cm langen Teil des Stammes ist das Wurzelgeflecht so mächtig geworden, daß es die Blattbasen ganz zerstört und abgesprengt hat.

Die Blätter zeigen frühzeitig an der Grenze zwischen dem etwa 8 mm langen, dünnen Scheidenteil und der starren hellgrünen Spreite einen anfangs schmalen (kaum $\frac{1}{4}$ mm breiten) schwarzbraunen Streifen, der sich allmählich auf 1—2 mm verbreitert; dann sehen wir das Blatt noch 2—3 mm über dem Querstreifen ganz vertrocknen und grau werden, und

die übrige Blattspreite fällt ab, eine ziemlich geradlinige horizontale Abbruchstelle an dem stehenbleibenden Blattteil hinterlassend.

Über den anatomischen Bau der Vegetationsorgane ist folgendes zu bemerken:

Im Querschnitt des Stammes finden wir den ganzen mittleren Teil, mindestens das mittlere Drittel des Durchmessers von wenigen, zum Teil breiten, einen nach außen konkaven Bogen darstellenden Bastpartien ein-

*Fig. 3.*

*Schoenodendron Bücheri* Engl. *A* eine Scheinähre mit mehreren ♀ Ährchen. *B* Ährchen mit den drei unteren Brakteen α, β, γ. *C* Pistill mit den am Grunde stehenden winzigen Brakteen, welche auch als Perigonblätter aufgefaßt werden könnten. *D* dieselben Brakteen δ, ε, ζ stärker vergrößert. *E* ein älteres Ährchen mit reifer Frucht, α, β, γ wie in *B*. *F* Frucht mit den am Grunde stehenden winzigen Brakteen. *G* Frucht im Längsschnitt, den Samen zeigend.

genommen, deren einzelne Zellen nur ein minimales Lumen besitzen (Taf. I, Fig. *A*, *B*). Nur schmale Streifen vom Grundgewebe trennen diese Bastpartien voneinander und von einem Kreis von Bündeln, welche mit mächtigen Bastlagen auf der zentripetalen Seite versehen sind. Dann folgt eine Zone etwa von der Breite eines Drittels des Radius, welche fast nur von den dünnwandigen Partien (Hadrom und Leptom) der stark nach außen gebogenen Bündel eingenommen ist (Taf. I, Fig. *B*). Die Bündel grenzen vielfach dicht aneinander oder sind nur durch schmale Partien von Grundgewebe getrennt, dessen Wände schwach bräunlich gefärbt sind. Scharf abgesetzt von diesem bräunlichen Gewebe ist das sehr dünnwandige Rinden-

gewebe, etwa ein Sechstel des Durchmessers breit und in die Blätter übergehend, auch von einzelnen Blattspursträngen durchsetzt.

Während die Blätter am Grunde eine sehr zarte Epidermis und kein mechanisches Gewebe besitzen, sind oberhalb der Basis die Epidermiszellen an beiden Seiten dickwandiger. Ferner ist das ältere Blatt mit einer Reihe von großen, in der Längsrichtung verlaufenden lysigenen Luftkanälen versehen, welche den jungen Blättern fehlen und sich allmählich zwischen den sowohl der konkaven Oberseite wie der konvexen Unterseite der Epidermis anliegenden Baststrängen ausgebildet haben. Den an der Unterseite verlaufenden liegen die Hadromstränge an; die an der Oberseite befindlichen sind hier und da noch durch Partien dazwischenliegenden, sehr dickwandigen Bastgewebes verbunden. Gegen die Blattspitze zu verschwinden die Luftkanäle gänzlich.

Interessant ist der anatomische Bau der Wurzeln. Diese besitzen, solange sie unter dem Schutz der Blattbasen und durch dieselben hindurch verlaufen, ein sehr zartwandiges äußeres Rindengewebe, großenteils bestehend aus radial gestreckten Zellen, deren radiäre Längsausdehnung dem Durchmesser einer darunterliegenden, aus etwa 12 Zellagen bestehenden stereomatischen Schicht entspricht (Taf. I, Fig. *C*). Zwischen letzterer und der Endodermis liegt ein aus sehr dünnwandigen ungleich großen, sich bräunenden Zellen bestehendes Grundgewebe. Der Zentralzylinder besitzt etwa 7 radiäre Hadromgruppen und ein großes Ringgefäß in der Mitte.

Auf den ersten Blick fallen nur die langgestreckten Zellen der äußeren Rinde auf, bei eingehenderer Betrachtung bemerkt man aber auch hier und da 2—3 Querwände, so daß diese physiologisch als Absorptionsgewebe aufzufassende Schicht nicht vollkommen einschichtig ist. Hier und da sind einzelne engere Zellen derselben über die Oberfläche der anderen hinaus als Haare verlängert. Wahrscheinlich ist diese Gewebeschicht sowie das Velamen der Orchideenluftwurzeln nur aus dem Dermatogen hervorgegangen. Doch konnte dies an dem trocknen Material nicht entschieden werden.

Es handelt sich nun darum, festzustellen, ob das eigentümliche Verhalten der Wurzeln, welches wir bei *Schoenodendron* beobachteten, auch anderen Cyperaceen zukommt. Ich untersuchte zunächst *Cephalocarpus dracaenula* Nees und fand davon im Berliner Herbar ein Exemplar, bei welchem der 12 cm lange, 4 mm dicke und bastreiche Stamm von 4—6 Schichten

dicht gestellter Wurzeln umgeben ist (Taf. I, Fig. *D*) und diese von stehengebliebenen Blattscheiden so bedeckt sind, daß von den Wurzeln nichts wahrzunehmen ist. An zwei anderen 20—30 cm hohen Exemplaren jedoch treten mehrfach zwischen den stark zerfaserten Blattscheiden einfache und verzweigte Nebenwurzeln heraus, welche zum Teil sogar frei herunterhängen und nicht dem Stengel anliegen. *Cephalocarpus* wächst eben in nebelreichen Bergwäldern der Provinz Rio Negro am Japura, in denen nach der Angabe von Martius sich eine drei Fuß mächtige Humusschicht angesammelt hat. Bei der größeren Luftfeuchtigkeit erfolgt eine raschere Zersetzung der Blattscheiden, und ebenso begünstigt diese eine reichere Entwicklung von Nebenwurzeln, während bei *Schoenodendron*, welches auf trockenen sonnigen Felsen wächst, die Blattscheiden lange Zeit erhalten bleiben und zusammenschließend eine festere Hülle um die unter ihnen liegenden Wurzeln bilden. Daß bei *Fintelmannia restioides* Kunth, welche an feuchten Felswänden der Tijuca in der Provinz Rio de Janeiro Polster bildend vorkommt, zahlreiche Faserwurzeln am Stamm heraustreten, ist nicht zu verwundern, da eben auch hier die zarten Blattscheiden stark zerstört werden. Der anatomische Bau der Wurzeln von *Cephalocarpus* weicht von demjenigen der Wurzeln von *Schoenodendron* etwas ab. Während wir bei *Schoenodendron* ein zentrales Bündel mit 9—10 Hadromplatten und mit 1—2 großen Gefäßen antreffen, sind bei *Cephalocarpus* in der Mitte 3—4 große Gefäße und keine kleineren sichtbar; ferner finden wir bei dieser Gattung eine auffallend großzellige und dickwandige Endodermis (Taf. II, Fig. *A*). Das Rindengewebe ist an den Wurzeln der mir vorliegenden trocknen Exemplare zerstört.

Von anderen Cyperaceen, bei denen sich ein kräftiger, bis 1 dem über den Boden tretender Stamm entwickelt, ist *Mapania* zu nennen. *M. dolichostachya* K. Schum. ähnelt nach den Angaben der Sammler einem kleinen *Pandanus*. Zenker sammelte diese Art auf steinigem Boden bei Bipindi, Dinklage und Ledermann sammelten sie auf sumpfigem Alluvialwaldboden, ersterer bei Batanga, letzterer bei Ilende. Wir sehen hier am Stamm an dem von Blättern entblößten Teil glatte schwarze, an der Oberfläche glänzende Wurzeln hervorbrechen, an denen erst, wenn sie unter spitzem Winkel absteigend den Boden erreicht haben, horizontal abstehende absorbierende Nebenwurzeln sich entwickeln. An den primären Adventivwurzeln ist ein Drittel der Rinde von sehr englumigen und ziemlich dick-

wandigen Zellen mit dunkelbraun gefärbten Membranen gebildet; die weitlumigere zartwandige und auch mit einigen Haaren versehene Oberhaut ist meistens zerstört und so die primäre Adventivwurzel zu einem Wurzelträger geworden.

Ähnlich ist es bei der am Kamerunberg oberhalb Buea vorkommenden *M. Deistelii* K. Schum., desgleichen bei der auf Java vorkommenden *M. humilis* (Haßk.) Benth. et Hook., jedoch hat diese nicht schwarzglänzende Adventivwurzeln wie die erstgenannte. Von *Scirpodendron costatum* Kurz sah ich nur Exemplare mit kleinem Stammstück, das aber genügt, um zu zeigen, daß hier die Wurzeln sich so wie bei *Mapania* verhalten. So sind also außer *Cephalocarpus* keine Cyperaceen bekannt, welche einen solchen von Blattresten bedeckten Wurzelmantel entwickeln wie *Schoenodendron*.

Die größte Übereinstimmung in den Wachstumsverhältnissen mit *Schoenodendron* zeigen die stammbildenden Velloziaceen, welche bekanntlich als echte Liliifloren von den Cyperaceen systematisch weit abstehen. Sie bilden bisweilen verzweigte Stämme von 1—2 m Höhe und wachsen besonders gern an trockenen, sonnigen Bergabhängen zwischen Steinen, nicht selten nur in schmalen Felsritzen abgerundeter Granitklippen wurzelnd.

Da derartige Standortsbedingungen nur wenigen xerophytischen Pflanzen zusagen, so kommen die Velloziaceen oft gesellig vor, z. B. sah ich selbst solche Gemeinschaften an den trockenen, felsigen Nordabhängen des westlichen Usambaragebirges, an steinigen Hängen bei Mombo in Westusambara, ferner in der Nähe des Frankenwaldes bei Johannesburg und in den Matoppos von Rhodesia. Welwitsch beobachtete auch eine Art, *B. squarrosa* (Welw.), bei Pungo Andongo in Angola an felsigen Abhängen »in thick masses«; ferner eine andere, *B. velutina* (Welw.), auf Sandsteinfelsen am Ufer des Cuansa »plentiful«; von *B. stenophylla* (Baker), welche bei Cusimba zwischen Majombo und Pomangala auf Sandsteinfelsen vorkommt, sagt Welwitsch: »plentiful and in dense clusters«, ferner »the stems are thickly crowded over wide areas«.

Von afrikanischen stammbildenden Arten konnte ich folgende untersuchen: *Barbacenia aequatorialis* (Rendle) Harms — Westusambara, an steinigen Hängen bei Mombo, 550 m ü. M. (Engler n. 3212), auch von da lebend im Botanischen Garten zu Dahlem; Mittel-Pare (Uhlig n. 600); *B. Goetzei*

Harms — Uhehe, am Ruaha-Fluß an trockenen, sonnigen Bergabhängen zwischen Steinen, um 600 m; *B. capillaris* (Welw.) Pax — Huilla in Benguela (Antunes n. 76); *B. splendens* (Rendle) Harms — Mount Malosa im südlichen Nyassaland, um 1300—1600 m (A. Whyte); *B. Wentzeliana* Harms — Unyika, bei Dorf Sante am Samba-Fluß an trockenen Abhängen, um 1200 m (W. Goetze n. 1409).

Bei allen diesen Arten ist der Stamm dicht von Blattbasen bedeckt, welche nicht wie bei *Schoenodendron* eine horizontale Abbruchslinie aufweisen, sondern vielmehr in ein stumpfes, etwas zerrissenes Dreieck endigen. Auf dem Querschnitt der Stämme sieht man wie bei *Schoenodendron* zwischen Stamm und Blättern einen Mantel von 3—4 Lagen dicht aneinander gepreßter, unverzweigter, gerade herunterlaufender Wurzeln. Alle untersuchten Stücke stammen von Ästen aus der oberen Region der Stämme, 4—6 dcm über dem Boden.

An einem alten *Barbacenia*-Stamm unbekannter (aber wahrscheinlich afrikanischer) Provenienz, der 6 dcm lang ist und 5, unten sogar 6 cm Durchmesser hat, konstatiere ich (5 dcm über der Basis) um eine kaum 1 cm dicke Achse einen Wurzelmantel von 1.3 cm Dicke und eine 2—3 mm starke Blätterschicht (Taf. II, Fig. *D*, *E*). An diesem Stamm ist die Wurzelschicht mehrfach von 2 mm dicken, unter einem Winkel von 30° aufsteigenden Ästen unterbrochen, von denen nur einzelne mit ihren Blattresten ein wenig über die Blattreste des Hauptstammes hinwegragen. Auf dem Querschnitt durch diesen Stamm (Taf. II, Fig. *F*) sieht man denselben umgeben von drei Gruppen dicht stehender Adventivwurzeln (rad.), welche den Stamm an Breite übertreffen und ebenso mächtig sind, sodann die Seitenäste (ram), welche auch von Adventivwurzeln umgeben sind.

Die Wurzeln von *Barbacenia aequatorialis*, welche wir lebend untersuchen konnten, besitzen außerhalb des Stereomzylinders eine aus mehreren Schichten dünnwandiger Zellen bestehende äußere Wurzelrinde (Taf. II, Fig. *B*, *C*); die einzelnen Zellen sind mehr oder weniger isodiametrisch und nicht radial gestreckt, wie es bei *Schoenodendron* der Fall ist. Als Beispiele von brasilianischen *Vellozia*-Arten, bei denen ganz dieselben anatomischen Verhältnisse wie bei *Barbacenia* beobachtet werden, will ich anführen die schon am Orinoco vorkommende und in Brasilien auf den Gipfeln der Tijuca bei Rio de Janeiro wachsende *Vellozia candida* Mikan, die zierliche brasilianische *V. abietina* Mart. und die in Minas Geraes vor-

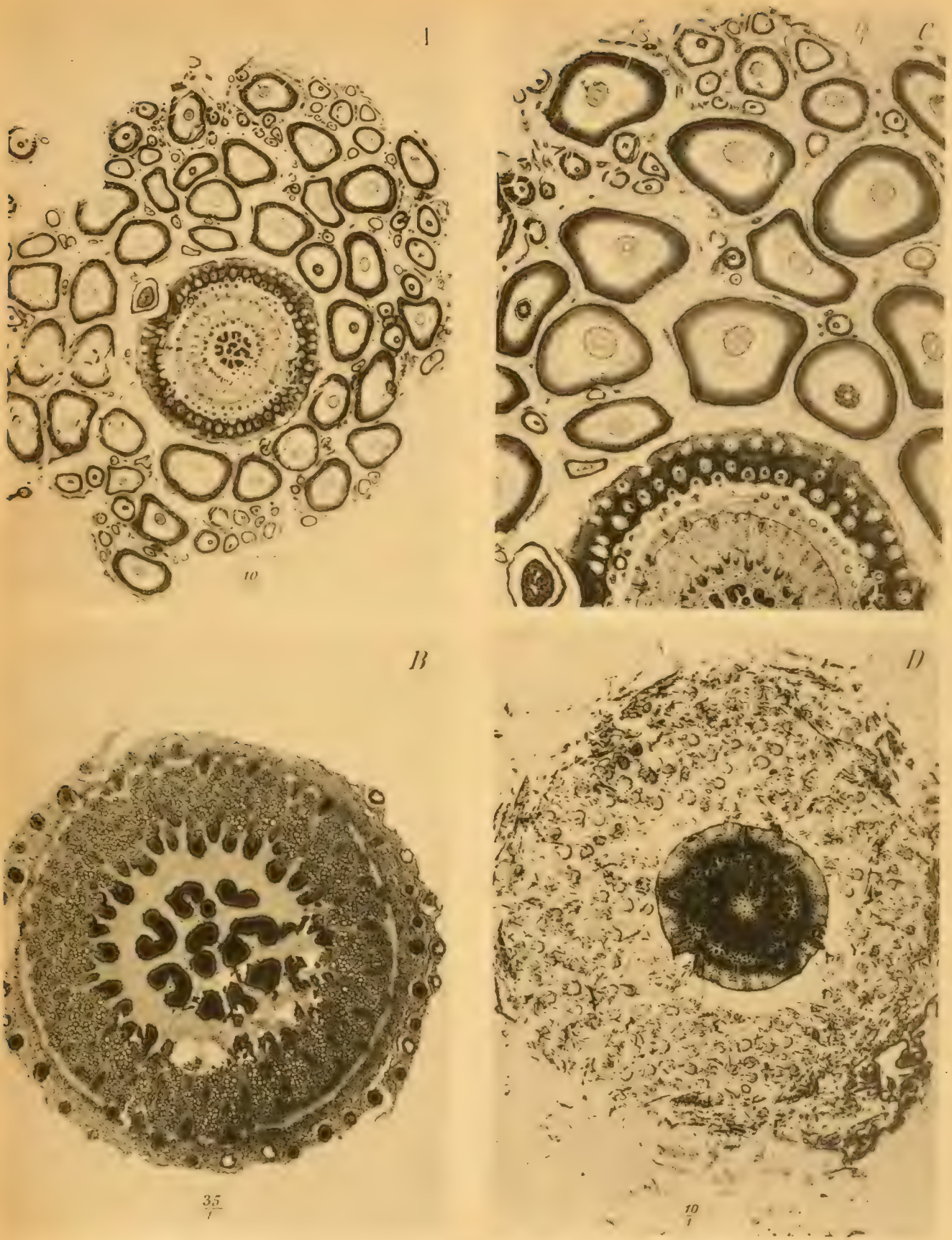
kommende, 2 m hoch werdende *V. compacta* Mart. Auf dem Längsschnitt durch die obersten Äste dieser Art haben wir auch sehr schön die oben beginnenden und nach unten wachsenden Adventivwurzeln gesehen.

Schließlich ist zu bemerken, daß die größeren Eriocaulaceen, wie z. B. der 1 m hohe *Paepalanthus speciosus* Koernicke, nur grundständige Wurzeln entwickeln. Es sind also nur die Cyperaceen *Schoenodendron* und *Cephalocarpus* sowie die Velloziaceen durch einen oberirdischen, unter den Blattbasen verborgenen Wurzelmantel ausgezeichnet.

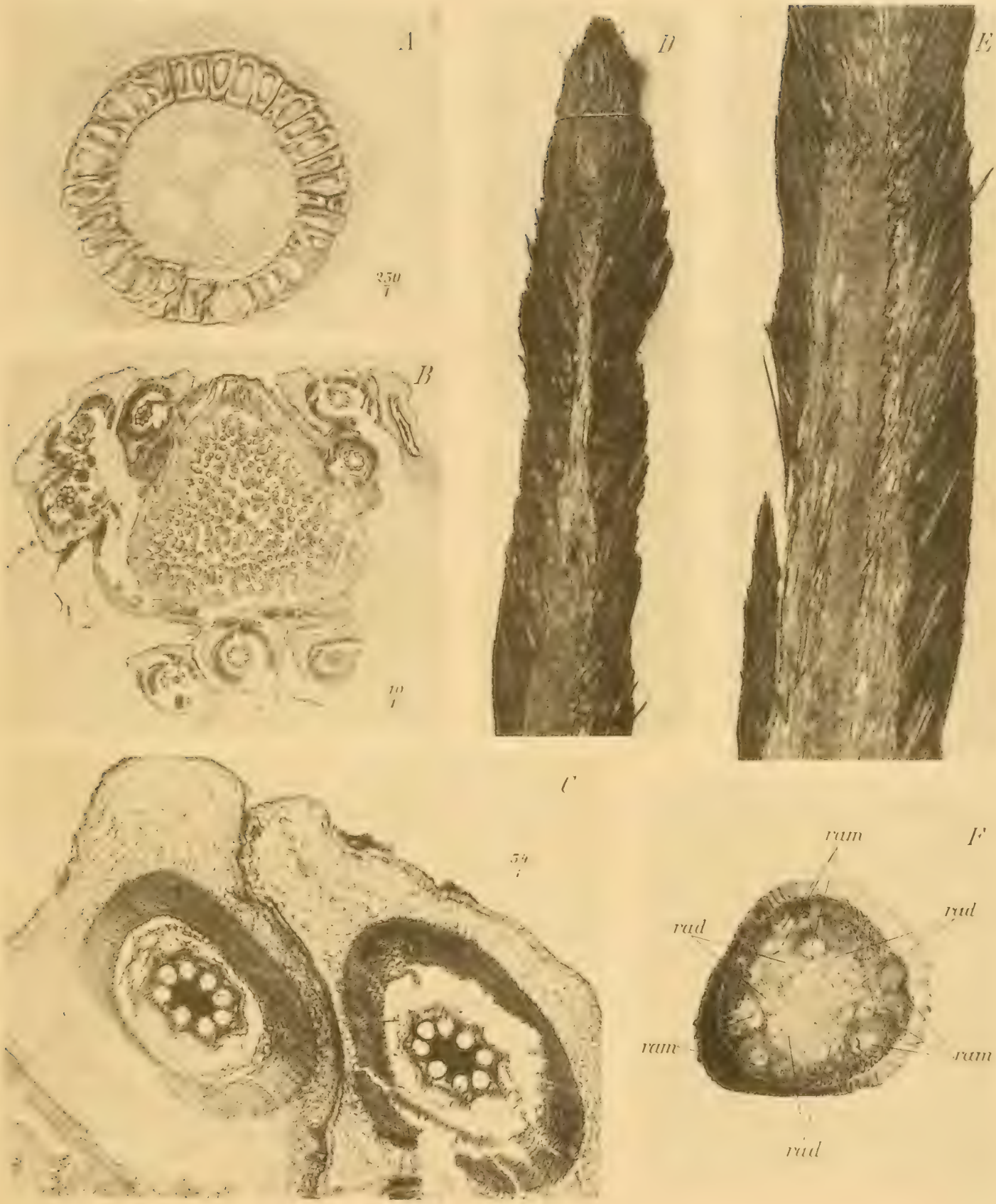
## Erklärung der Figuren auf Tafel I und II.

Taf. I, *A—C*: *Schoenodendron Bücheri* Engl. *A.* Querschnitt durch einen oberen Ast (40 cm über der Erde) und die ihn umgebenden Wurzeln sowie deren Seitenwurzeln, $^{10}/_{1}$. *B.* Querschnitt durch den Stamm und die Blätter, 40 cm über der Erde, $^{35}/_{1}$. *C.* Querschnitt wie bei *A*, etwa $^{18}/_{1}$, zeigt sehr schön die Absorptionsschicht der Wurzeln. *D. Cephalocarpus dracaenula* Nees. Querschnitt durch den Stamm und den Wurzelmantel, etwa 15 cm über der Erde, $^{10}/_{1}$; die Blattreste sind beim Präparieren größtenteils herausgefallen.

Taf. II, *A*: *Cephalocarpus dracaenula* Nees. Querschnitt durch das Leitbündel der Wurzel, $^{250}/_{1}$. *B*, *C. Barbacenia aequatorialis* (Rendle) Harms. *B.* Querschnitt durch den Stamm und einige Adventivwurzeln, $^{10}/_{1}$. *C.* Querschnitt durch zwei Adventivwurzeln, $^{54}/_{1}$. *D*, *E.* Längsschnitte durch den Stamm einer unbekannten *Barbacenia*. *F.* Querschnitt durch den Stamm; *rad* die Wurzelschichten, *ram* die nach oben abgehenden Seitenzweige, nat. Gr.




A. Engler und K. Krause: Über den anatomischen Bau der baumartigen Cyperacee Schoenodendron Bücheri Engl. aus Kamerun. Taf. I.




A. Engler und K. Krause: Über den anatomischen Bau der baumartigen Cyperacee Schoenodendron Bücheri Engl. aus Kamerun. Taf. II.

# ANHANG.

## ABHANDLUNGEN NICHT ZUR AKADEMIE GEHÖRIGER GELEHRTER.

# Einundzwanzigstellige Werte der Funktionen Sinus und Cosinus zur genauen Berechnung von zwanzigstelligen Werten sämtlicher trigonometrischen Funktionen eines beliebigen Arguments sowie ihrer Logarithmen.

Berechnet und zusammengestellt

von

Prof. J. PETERS.

Vorgelegt von Hrn. Auwers in der Gesamtsitzung am 19. Januar 1911.
Zum Druck eingereicht am gleichen Tage, ausgegeben am 20. April 1911.

## Einleitung.

Als ich bei Bearbeitung der achtstelligen Logarithmentafel die trotz zwölfstelliger Rechnung für die Abkürzung auf acht Dezimalen zweifelhaft gebliebenen Werte einer Neurechnung mit mindestens sechzehn Dezimalen unterziehen wollte[1], hielt ich vergeblich Ausschau nach einem Werk, mit dessen Hilfe man bequem und schnell die Logarithmen oder auch die numerischen Werte der trigonometrischen Funktionen auf sechzehn oder mehr Dezimalstellen ermitteln könnte. Um diese Lücke in der Tafelliteratur auszufüllen, habe ich mit Beihilfe von Hrn. Eckert, dem hierfür mein bester Dank ausgesprochen sein soll, die einundzwanzigstelligen numerischen Werte für Sinus und Cosinus von zehn zu zehn Bogenminuten alter Teilung durch den ganzen Quadranten, ferner die gleichen Werte für jede Bogensekunde des ersten Zehnminutenintervalls, also von 0° 0' bis 0° 10', berechnet und in den beiden folgenden Tabellen zusammengestellt.

Über den Gebrauch der Tafel ist kurz folgendes zu erwähnen. Sinus und Cosinus eines Winkels, der sich als Vielfaches einer ganzen Bogensekunde darstellt, werden durch einfache Multiplikation erhalten aus den Formeln:

$$\sin(\alpha \pm \Delta\alpha) = \sin\alpha \cos\Delta\alpha \pm \cos\alpha \sin\Delta\alpha$$

und

$$\cos(\alpha \pm \Delta\alpha) = \cos\alpha \cos\Delta\alpha \mp \sin\alpha \sin\Delta\alpha.$$

Enthält der Winkel, dessen Funktionen bestimmt werden sollen, noch Bruchteile einer Bogensekunde, so muß zuerst Tafel II mit diesem Bruch-

[1] Näheres hierüber siehe in der Einleitung des kürzlich erschienenen Werkes: J. Bauschinger und J. Peters, Logarithmisch-Trigonometrische Tafeln mit acht Dezimalstellen. Erster Band, Tafel der achtstelligen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 200000. Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1910.

teil interpoliert werden: erst dann wird die Zusammensetzung der aus Tafel I und Tafel II entnommenen Werte nach dem Fundamentaltheorem der goniometrischen Funktionen durchgeführt.

Würde man bei dieser Zusammensetzung stets von dem nächstgelegenen vollen Zehnminutenwert ausgehen, so hätte die zweite Tafel nur bis auf fünf Bogenminuten ausgedehnt zu werden brauchen. Ich habe die Tabulierung bis 10′ durchgeführt, um, außer einem bei Auseinandersetzung der Berechnung der Tangenten angeführten Grunde, durch Ermöglichung einer doppelten Berechnung von Sinus oder Cosinus, nämlich von den beiden einschließenden vollen Zehnminutenwerten aus, eine scharfe Kontrolle für die Richtigkeit der Rechnung darzubieten.

Die Tangente eines beliebigen Winkels läßt sich leicht durch eine Division aus einer der beiden Formeln:

$$\operatorname{tang}(\beta+\Delta\beta)=\frac{\cos 2\Delta\beta-\cos 2\beta}{\sin 2\beta-\sin 2\Delta\beta}=\frac{\sin 2\beta+\sin 2\Delta\beta}{\cos 2\beta+\cos 2\Delta\beta}$$

oder

$$\operatorname{tang}(\beta-\Delta\beta)=\frac{\cos 2\Delta\beta-\cos 2\beta}{\sin 2\beta+\sin 2\Delta\beta}=\frac{\sin 2\beta-\sin 2\Delta\beta}{\cos 2\beta+\cos 2\Delta\beta}$$

ableiten. Durch die Tatsache, daß in den rechten Seiten dieser Gleichungen die Funktionen Sinus und Cosinus des doppelten Inkrements $2\Delta\beta$ vorkommen, wurde die Ausdehnung der Tafel II auf zehn Bogenminuten bedingt.

Liegt die Aufgabe vor, den Logarithmus einer trigonometrischen Funktion mit sechzehn oder mehr Dezimalstellen zu bestimmen, so ist hierfür der zweckmäßigste Weg, zunächst den numerischen Wert der trigonometrischen Funktion nach dem vorstehend auseinandergesetzten Verfahren zu berechnen und dann hierzu vermittels des aus Steinhauser[1] oder Callet[2] oder wegen der Verifizierung am besten aus beiden zu entnehmenden einundzwanzigstelligen Logarithmus einer dem Logarithmanden möglichst nahe gelegenen, mindestens sechsziffrigen Zahl den Logarithmus zu bestimmen nach der in diesem Falle äußerst stark konvergierenden Reihe:

$$\log(n+\Delta n)=\log n+2M\left\{\frac{\Delta n}{2n+\Delta n}+\frac{1}{3}\left(\frac{\Delta n}{2n+\Delta n}\right)^3+\cdots\cdots\right\};$$

[1] Steinhauser, Anton: Hilfstafeln zur präcisen Berechnung zwanzigstelliger Logarithmen zu gegebenen Zahlen und der Zahlen zu zwanzigstelligen Logarithmen. Wien, Carl Gerold's Sohn, 1880.

[2] Callet, François: Tables portatives de logarithmes. Paris, Firmin Didot, 1795.

hierin bezeichnet $M$ den Modul der Briggsschen Logarithmen, dessen erste hundert Vielfache man auf S. 52 dieser Arbeit findet.

Auch für den umgekehrten Fall, den Winkel aus den trigonometrischen Funktionen zu bestimmen, möchte ich hier Rechenvorschriften anführen, obschon zu ihrer Anwendung in der Praxis bedeutend weniger häufig Gelegenheit sein wird. Allen Fällen ist gemeinsam, zunächst zu der gegebenen Funktion mit Hilfe einer sieben- oder besser noch achtstelligen Logarithmentafel einen möglichst guten Näherungswert für den gesuchten Winkel zu ermitteln. Nenne ich diesen Näherungswert $\gamma$ und den gesuchten Winkel $\gamma + \Delta\gamma$, so gelten zur Bestimmung von $\Delta\gamma$ die Gleichungen:

$$\Delta\gamma = \frac{\sin(\gamma+\Delta\gamma) - \sin\gamma}{\text{arc } 1'' \,(\cos\gamma - \frac{1}{2}\Delta\gamma \text{ arc } 1'' \sin\gamma)}$$

$$\Delta\gamma = \frac{\cos\gamma - \cos(\gamma+\Delta\gamma)}{\text{arc } 1'' \,(\sin\gamma + \frac{1}{2}\Delta\gamma \text{ arc } 1'' \cos\gamma)}$$

$$\Delta\gamma = \frac{\operatorname{tang}(\gamma+\Delta\gamma) - \operatorname{tang}\gamma}{\text{arc } 1'' \,(1 + \operatorname{tang}\gamma \operatorname{tang}(\gamma+\Delta\gamma))}$$

$$\Delta\gamma = \frac{\operatorname{cotg}\gamma - \operatorname{cotg}(\gamma+\Delta\gamma)}{\text{arc } 1'' \,(1 + \operatorname{cotg}\gamma \operatorname{cotg}(\gamma+\Delta\gamma))},$$

je nachdem $\sin(\gamma+\Delta\gamma)$, $\cos(\gamma+\Delta\gamma)$, $\operatorname{tang}(\gamma+\Delta\gamma)$ oder $\operatorname{cotg}(\gamma+\Delta\gamma)$ zur Bestimmung von $\gamma+\Delta\gamma$ gegeben war. Da in den beiden ersten Gleichungen rechts im Nenner die gesuchte Unbekannte $\Delta\gamma$ vorkommt, so kann aus ihnen $\Delta\gamma$ nur durch sukzessive Näherung gewonnen werden, indem man zunächst auf der rechten Seite der Gleichungen im Nenner das Glied mit $\Delta\gamma$ gleich Null annimmt und unter dieser Annahme einen ersten Näherungswert $\Delta\gamma_1$ berechnet. Mit diesem Näherungswert löst man nun die Gleichung nochmals auf und fährt damit so lange fort, bis die Rechnung steht.

Ist der zwanzigstellige Logarithmus einer trigonometrischen Funktion zur Bestimmung des Winkels gegeben, so suche man hierzu zunächst den Numerus auf. Zu diesem Zwecke berechne man mit Hilfe von Callets und Steinhausers Tafeln den einundzwanzigstelligen Logarithmus einer dem gesuchten Numerus $n+\Delta n$ möglichst nahe gelegenen, mindestens sechsziffrigen Zahl $n$. Dann ergibt sich das gesuchte $n+\Delta n$ aus der Berechnung der folgenden Gleichungen:

$$\delta = \frac{1}{M}\left\{\log(n+\Delta n) - \log n\right\}$$

$$R = 1 + \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \cdots\cdots$$

$$n + \Delta n = R \cdot n.$$

Die ersten hundert Vielfache von $\frac{1}{M}$ findet man auf S. 54; sie dienen gleich den Vielfachen von $M$ und arc 1" zur Erleichterung der notwendig werdenden Multiplikationen.

Wenige Zahlenbeispiele sollen das Gesagte erläutern.

1. Beispiel. Die numerischen Werte der trigonometrischen Funktionen des Winkels 30° 21' 57" seien zu bestimmen.

Man entnehme aus Tafel I die Werte:

$$\begin{aligned} \sin 30°\,20' &= 0.50502\ 98415\ 74690\ 018874 \\ \cos 30\ 20 &= 0.86310\ 18822\ 35836\ 339482; \end{aligned}$$

ebenso aus Tafel II:

$$\begin{aligned} \sin 1'\,57'' &= 0.00056\ 72319\ 76480\ 138007 \\ \cos 1\ 57 &= 0.99999\ 98391\ 23929\ 488663; \end{aligned}$$

durch Multiplikation[1] der entsprechenden Faktoren erhält man:

$$\begin{aligned} \sin 30°\,20'\cos 1'\,57'' &= 0.50502\ 97603\ 27473\ 615375 \\ \cos 30\ 20\ \sin 1\ 57 &= 0.00048\ 95789\ 86564\ 360762 \\ \cos 30°\,20'\cos 1'\,57'' &= 0.86310\ 17433\ 83397\ 074442 \\ \sin 30\ 20\ \sin 1\ 57 &= 0.00028\ 64690\ 75217\ 862393; \end{aligned}$$

hieraus ergeben sich

$$\begin{aligned} \sin 30°\,21'\,57'' &= 0.50551\ 93393\ 14037\ 97614 \\ \cos 30\ 21\ 57 &= 0.86281\ 52743\ 08179\ 21205. \end{aligned}$$

Zur Kontrolle rechne man aus:

$$\begin{aligned} \sin 30°\,30' &= 0.50753\ 83629\ 60704\ 168939 \\ \cos 30\ 30 &= 0.86162\ 91604\ 41525\ 745451 \\ \sin 8'\,3'' &= 0.00234\ 16479\ 39754\ 870820 \\ \cos 8\ 3 &= 0.99999\ 72583\ 38704\ 767556 \end{aligned}$$

die Produkte:

$$\begin{aligned} \sin 30°\,30'\cos 8'\,3'' &= 0.50753\ 69714\ 62418\ 593940 \\ \cos 30\ 30\ \sin 8\ 3 &= 0.00201\ 76321\ 48380\ 617803 \\ \cos 30°\,30'\cos 8'\,3'' &= 0.86162\ 67981\ 46205\ 719294 \\ \sin 30\ 30\ \sin 8\ 3 &= 0.00118\ 84761\ 61973\ 492756; \end{aligned}$$

hieraus findet man durch Addition oder Subtraktion, vollständig übereinstimmend mit den früheren Werten:

$$\begin{aligned} \sin 30°\,21'\,57'' &= 0.50551\ 93393\ 14037\ 97614 \\ \cos 30\ 21\ 57 &= 0.86281\ 52743\ 08179\ 21205. \end{aligned}$$

[1] Derartige Multiplikationen werden entweder durch Benutzung von Neperschen Rechenstäbchen ausgeführt, oder besser noch, indem man sich die ersten neun Vielfache des Multiplikanden zuvor niederschreibt.

Ferner ist:

$$\operatorname{tang} 30°\,21'\,57'' = \operatorname{tang}(30°\,20' + 1'\,57'') = \frac{\cos 3'\,54'' - \cos 60°\,40'}{\sin 60°\,40' - \sin 3'\,54''}$$

$$= \frac{0.99999\ 93564\ 95769\ 716872 - 0.48988\ 97182\ 38087\ 001915}{0.87178\ 44136\ 96762\ 376046 - 0.00113\ 44637\ 70452\ 173125}$$

$$= \frac{0.51010\ 96382\ 57682\ 714957}{0.87064\ 99499\ 26310\ 202921} = 0.58589\ 52134\ 56173\ 99317\,.$$

Die Division der vorher erhaltenen Werte von Sinus und Cosinus erzielt die Prüfung dieses Wertes:

$$\operatorname{tang} 30°\,21'\,57'' = \frac{\sin 30°\,21'\,57''}{\cos 30\ 21\ 57} = \frac{0.50551\ 93393\ 14037\ 97614}{0.86281\ 52743\ 08179\ 21205} = 0.58589\ 52134\ 56173\ 99317\,.$$

2. Beispiel. $\log \sin 25°\,46'\,11''.3333\,\cdots\cdots$ zu bestimmen.

Aus Tafel II bestimme man durch Interpolation die Werte:

$$\sin 6'\,11''.3333\,\cdots\cdots = 0.00180\ 02738\ 30074\ 986523$$
$$\cos 6\ 11.3333\,\cdots\cdots = 0.99999\ 83795\ 05755\ 372771$$
$$\sin 3'\,48''.6666\,\cdots\cdots = 0.00110\ 86070\ 57055\ 559474$$
$$\cos 3\ 48.6666\,\cdots\cdots = 0.99999\ 93854\ 95007\ 715113\,;$$

aus ihnen und den der Tafel I entnommenen Werten für die Argumente $25°40'$ und $25°50'$ ergibt sich, zwiefach gerechnet, in der eben durchgeführten Weise:

$$\sin 25°\,46'\,11''.3333\,\cdots\cdots = 0.43475\ 67232\ 76169\ 07221\,.$$

Da die Beziehung:

$$434757 = 463 \cdot 939$$

besteht, so setze man

$$n + \Delta n = 0.43475\ 70000\ 00000\ 00000$$
$$n = 0.43475\ 67232\ 76169\ 07221\,;$$

dann findet man der Reihe nach:

$$\Delta n = 0.00000\ 02767\ 23830\ 92779$$
$$2n + \Delta n = 0\ 86951\ 37232\ 76169\ 07221$$
$$\frac{\Delta n}{2n + \Delta n} = 0.00000\ 03182\ 51251\ 843558$$
$$\frac{1}{3}\left(\frac{\Delta n}{2n + \Delta n}\right)^3 = \qquad\qquad 11$$
$$\frac{\Delta n}{2n + \Delta n} + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta n}{2n + \Delta n}\right)^3 + \cdots = 0.00000\ 03182\ 51251\ 843569$$
$$M\left\{\frac{\Delta n}{2n + \Delta n} + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta n}{2n + \Delta n}\right)^3 + \cdots\cdots\right\} = 0.00000\ 01382\ 14762\ 534464$$
$$2M\left\{\frac{\Delta n}{2n + \Delta n} + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta n}{2n + \Delta n}\right)^3 + \cdots\cdots\right\} = 0.00000\ 02764\ 29525\ 068928$$
$$\log (n + \Delta n) = 9.63824\ 65832\ 84064\ 057777 - 10$$ (aus Callet u. Steinhauser)
$$\log \sin 25°\,46'\,11''.3333\,\cdots\cdots = \log n = 9.63824\ 63068\ 54538\ 98885 - 10\,.$$

3. Beispiel. Aus $\log \sin(\gamma + \Delta\gamma) = 9.63824\ 63068\ 54538\ 98885 - 10$ sei der Winkel $\gamma + \Delta\gamma$ zu bestimmen.

Man setze

$$\log(n + \Delta n) = 9.63824\ 63068\ 54538\ 98885 - 10$$

und nehme als Näherungswert, dessen einundzwanzigstelligen Logarithmus man, da $434758 = 646 \cdot 673$, mit Callet und Steinhauser bestimmen kann,

$$n = 0.43475\ 80000\ 00000\ 00000;$$

dann findet sich:

$$\log n = 9.63824\ 75822\ 19060\ 931766 - 10$$

$$\log(n + \Delta n) - \log n = -0.00000\ 12753\ 64521\ 942916$$

$$\delta = \frac{1}{M}\left\{\log(n + \Delta n) - \log n\right\} = -0.00000\ 29366\ 35336\ 359236$$

$$R = 1 + \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \cdots = 0.99999\ 70633\ 68975\ 550093$$

$$\sin(\gamma + \Delta\gamma) = n + \Delta n = R \cdot n = 0.43475\ 67232\ 76169\ 07221.$$

Als Näherungswert für den gesuchten Winkel nehme ich an:

$$\gamma = 25^\circ 46'\ 11''.332$$

und berechne (nach Beispiel 2)

$$\sin\gamma = 0.43475\ 67174\ 54862\ 908107$$
$$\cos\gamma = 0.90054\ 79424\ 37198\ 898942;$$

dann ist

$$\sin(\gamma + \Delta\gamma) - \sin\gamma = 0.00000\ 00058\ 21306\ 164103$$

$$\frac{\sin(\gamma + \Delta\gamma) - \sin\gamma}{\text{arc } 1''} = 0''.00120\ 07305\ 88043\ 7$$

$$\Delta\gamma_1 = \frac{\sin(\gamma + \Delta\gamma) - \sin\gamma}{\text{arc } 1'' \cos\gamma} = 0.00133\ 33333\ 31254$$

$$\Delta\gamma = \frac{\sin(\gamma + \Delta\gamma) - \sin\gamma}{\text{arc } 1''\,(\cos\gamma - \tfrac{1}{2}\Delta\gamma_1\,\text{arc } 1''\sin\gamma)} = 0.00133\ 33333\ 33334.$$

Dieser Wert ist keiner weiteren Näherung fähig, so daß sich

$$\gamma + \Delta\gamma = 25^\circ 46'\ 11''.33333\ 33333\ 33334$$

ergibt.

Eine Garantie für die Richtigkeit der in Tafel I und Tafel II aufgeführten Werte liegt zunächst in deren Berechnungsart. Für beide Tafeln wurde vorab ein Gerippe hergestellt und dann wurden zwischen diese Hauptwerte alle übrigen Werte nach dem einen oder anderen Verfahren eingeschaltet. Da diese Interpolation stets von den beiden Enden eines Intervalls aus bis zur Mitte des Intervalls gegeneinander geführt wurde, so bewies die Übereinstimmung der beiden auf diese Art erhaltenen Resultate für den mittleren Wert jedes Intervalls die Richtigkeit aller Werte innerhalb dieses

Intervalls einschließlich der beiden Ausgangspunkte. Für Tafel I wurden ferner sämtliche 540 Werte außer nach den Kontrollformeln[1]:

$$\sin \alpha = \cos (30° - \alpha) - \cos (30° + \alpha)$$
$$\cos \alpha = \sin (30° - \alpha) + \sin (30° + \alpha)$$

bis auf 24 Dezimalstellen durch Differenzen bis zur 9. Ordnung einschließlich geprüft. Desgleichen nahm ich eine Differenzenkontrolle der vierundzwanzigstelligen Werte der zweiten Tafel vor. Hier genügte die Berücksichtigung der Differenzen bis zur 4. Ordnung einschließlich. In beiden Fällen ergab sich, daß die Unsicherheit der Werte noch keine zwei Einheiten der 24. Dezimale betrug. Bei der Abkürzung auf 21 Dezimalstellen habe ich dann noch die in der 24. Dezimale auf 499, 500 und 501 ausgehenden Werte einer vollständig unabhängigen Neurechnung unterworfen, so daß alle Werte der beiden Tafeln bis auf eine halbe Einheit der angesetzten 21. Dezimale gesichert sind.

Daß beim Korrekturlesen die allergrößte Sorgfalt verwendet worden, um Übereinstimmung zwischen dem Druck und den Originalrechnungen zu erzielen, ist wohl selbstverständlich.

[1] Diese Formeln können auch, falls man bei doppelter Rechnung (s. Beispiel 1) keine Übereinstimmung erzielt, zweckmäßig verwendet werden, um sich zunächst von der Richtigkeit der aus Tafel I gebrauchten Werte zu überzeugen.

# Tafel I.

Einundzwanzigstellige Werte der Funktionen Sinus und Cosinus von 10 zu 10 Bogenminuten.

| $\alpha$ | sin $\alpha$ | cos $\alpha$ | |
|---|---|---|---|
| 0° 0′ | 0.00000 00000 00000 000000 | 1.00000 00000 00000 000000 | 90° 0′ |
| 0 10 | 0.00290 88779 84361 934424 | 0.99999 57692 05486 236116 | 89 50 |
| 0 20 | 0.00581 77313 54993 833955 | 0.99998 30768 57744 188899 | 89 40 |
| 0 30 | 0.00872 65354 98373 934965 | 0.99996 19230 64171 288737 | 89 30 |
| 0 40 | 0.01163 52658 01397 014603 | 0.99993 23080 03762 243218 | 89 20 |
| 0 50 | 0.01454 38976 51582 656770 | 0.99989 42319 27107 522546 | 89 10 |
| 1 0 | 0.01745 24064 37283 512819 | 0.99984 76951 56391 239157 | 89 0 |
| 1 10 | 0.02036 07675 47893 555195 | 0.99979 26980 85388 421519 | 88 50 |
| 1 20 | 0.02326 89563 74056 322272 | 0.99972 92411 79461 682175 | 88 40 |
| 1 30 | 0.02617 69483 07873 152611 | 0.99965 73249 75557 280037 | 88 30 |
| 1 40 | 0.02908 47187 43111 406889 | 0.99957 69500 82200 576963 | 88 20 |
| 1 50 | 0.03199 22430 75412 675724 | 0.99948 81171 79490 888669 | 88 10 |
| 2 0 | 0.03489 94967 02500 971646 | 0.99939 08270 19095 730006 | 88 0 |
| 2 10 | 0.03780 64550 24390 903444 | 0.99928 50804 24244 454662 | 87 50 |
| 2 20 | 0.04071 30934 43595 831135 | 0.99917 08782 89721 289327 | 87 40 |
| 2 30 | 0.04361 93873 65335 999782 | 0.99904 82215 81857 762404 | 87 30 |
| 2 40 | 0.04652 53121 97746 650418 | 0.99891 71113 38524 527302 | 87 20 |
| 2 50 | 0.04943 08433 52086 106298 | 0.99877 75486 69122 580408 | 87 10 |
| 3 0 | 0.05233 59562 42943 832722 | 0.99862 95347 54573 873784 | 87 0 |
| 3 10 | 0.05524 06262 88448 468679 | 0.99847 30708 47311 322699 | 86 50 |
| 3 20 | 0.05814 48289 10475 828539 | 0.99830 81582 71268 208048 | 86 40 |
| 3 30 | 0.06104 85395 34856 872037 | 0.99813 47984 21866 973779 | 86 30 |
| 3 40 | 0.06395 17335 91585 640795 | 0.99795 29927 66007 419400 | 86 20 |
| 3 50 | 0.06685 43865 15027 159612 | 0.99776 27428 42054 287675 | 86 10 |
| 4 0 | 0.06975 64737 44125 300776 | 0.99756 40502 59824 247613 | 86 0 |
| 4 10 | 0.07265 79707 22610 609620 | 0.99735 69167 00572 272863 | 85 50 |
| 4 20 | 0.07555 88528 99208 089588 | 0.99714 13439 16977 415625 | 85 40 |
| 4 30 | 0.07845 90957 27844 945033 | 0.99691 73337 33127 976198 | 85 30 |
| 4 40 | 0.08135 86746 67858 279994 | 0.99668 48880 44506 068297 | 85 20 |
| 4 50 | 0.08425 75651 84202 751204 | 0.99644 40088 17971 580261 | 85 10 |
| 5 0 | 0.08715 57427 47658 173558 | 0.99619 46980 91745 532295 | 85 0 |
| 5 10 | 0.09005 31828 35037 076295 | 0.99593 69579 75392 829877 | 84 50 |
| 5 20 | 0.09294 98609 29392 208130 | 0.99567 07906 49804 413491 | 84 40 |
| 5 30 | 0.09584 57525 20223 989589 | 0.99539 61983 67178 804823 | 84 30 |
| 5 40 | 0.09874 08331 03687 910778 | 0.99511 31834 51003 049580 | 84 20 |
| 5 50 | 0.10163 50781 82801 872850 | 0.99482 17482 96033 057104 | 84 10 |
| 6 0 | 0.10452 84632 67653 471400 | 0.99452 18953 68273 336923 | 84 0 |
| 6 10 | 0.10742 09638 75607 220033 | 0.99421 36272 04956 132441 | 83 50 |
| 6 20 | 0.11031 25555 31511 712372 | 0.99389 69464 14519 951919 | 83 40 |
| 6 30 | 0.11320 32137 67906 720724 | 0.99357 18556 76587 496942 | 83 30 |
| 6 40 | 0.11609 29141 25230 229676 | 0.99323 83577 41942 988548 | 83 20 |
| 6 50 | 0.11898 16321 52025 402856 | 0.99289 64554 32508 891229 | 83 10 |
| 7 0 | 0.12186 93434 05147 481113 | 0.99254 61516 41322 034980 | 83 0 |
| | cos $(90 - \alpha)$ | sin $(90 - \alpha)$ | $90 - \alpha$ |

| $\alpha$ | $\sin \alpha$ | $\cos \alpha$ | |
|---|---|---|---|
| 7° 0′ | 0.12186 93434 05147 481113 | 0.99254 61516 41322 034980 | 83° 0′ |
| 7 10 | 0.12475 60234 49970 610360 | 0.99218 74493 32509 135608 | 82 50 |
| 7 20 | 0.12764 16478 60594 597340 | 0.99182 03515 41261 713513 | 82 40 |
| 7 30 | 0.13052 61922 20051 591548 | 0.99144 48613 73810 411145 | 82 30 |
| 7 40 | 0.13340 96321 20512 691588 | 0.99106 09820 07398 709353 | 82 20 |
| 7 50 | 0.13629 19431 63494 474182 | 0.99066 87166 90256 042861 | 82 10 |
| 8 0 | 0.13917 31009 60065 444112 | 0.99026 80687 41570 315084 | 82 0 |
| 8 10 | 0.14205 30811 31052 403339 | 0.98985 90415 51459 812522 | 81 50 |
| 8 20 | 0.14493 18593 07246 737541 | 0.98944 16385 80944 518974 | 81 40 |
| 8 30 | 0.14780 94111 29610 618345 | 0.98901 58633 61916 829810 | 81 30 |
| 8 40 | 0.15068 57122 49483 119496 | 0.98858 17194 97111 666549 | 81 20 |
| 8 50 | 0.15356 07383 28786 245213 | 0.98813 92106 60075 991994 | 81 10 |
| 9 0 | 0.15643 44650 40230 869010 | 0.98768 83405 95137 726190 | 81 0 |
| 9 10 | 0.15930 68680 67522 581213 | 0.98722 91131 17374 063460 | 80 50 |
| 9 20 | 0.16217 79231 05567 443454 | 0.98676 15321 12579 190787 | 80 40 |
| 9 30 | 0.16504 76058 60677 648383 | 0.98628 56015 37231 407825 | 80 30 |
| 9 40 | 0.16791 58920 50777 082874 | 0.98580 13254 18459 648801 | 80 20 |
| 9 50 | 0.17078 27574 05606 792972 | 0.98530 87078 54009 406609 | 80 10 |
| 10 0 | 0.17364 81776 66930 348852 | 0.98480 77530 12208 059367 | 80 0 |
| 10 10 | 0.17651 21285 88739 108041 | 0.98429 84651 31929 599749 | 79 50 |
| 10 20 | 0.17937 45859 37457 375185 | 0.98378 08485 22558 767372 | 79 40 |
| 10 30 | 0.18223 55254 92147 456603 | 0.98325 49075 63954 584555 | 79 30 |
| 10 40 | 0.18509 49230 44714 607909 | 0.98272 06467 06413 295749 | 79 20 |
| 10 50 | 0.18795 27544 00111 872961 | 0.98217 80704 70630 710965 | 79 10 |
| 11 0 | 0.19080 89953 76544 812405 | 0.98162 71834 47663 953497 | 79 0 |
| 11 10 | 0.19366 36218 05676 120081 | 0.98106 79902 98892 612287 | 78 50 |
| 11 20 | 0.19651 66095 32830 125561 | 0.98050 04957 55979 299250 | 78 40 |
| 11 30 | 0.19936 79344 17197 181086 | 0.97992 47046 20829 611881 | 78 30 |
| 11 40 | 0.20221 75723 32037 931180 | 0.97934 06217 65551 501510 | 78 20 |
| 11 50 | 0.20506 54991 64887 463199 | 0.97874 82521 32414 047528 | 78 10 |
| 12 0 | 0.20791 16908 17759 337102 | 0.97814 76007 33805 637929 | 78 0 |
| 12 10 | 0.21075 61232 07349 492706 | 0.97753 86726 52191 556548 | 77 50 |
| 12 20 | 0.21359 87722 65240 032712 | 0.97692 14730 40070 977324 | 77 40 |
| 12 30 | 0.21643 96139 38102 879760 | 0.97629 60071 19933 365971 | 77 30 |
| 12 40 | 0.21927 86241 87903 305810 | 0.97566 22801 84214 289418 | 77 20 |
| 12 50 | 0.22211 57789 92103 332113 | 0.97502 02975 95250 633395 | 77 10 |
| 13 0 | 0.22495 10543 43864 998051 | 0.97437 00647 85235 228540 | 77 0 |
| 13 10 | 0.22778 44262 52253 497139 | 0.97371 15872 56170 885418 | 76 50 |
| 13 20 | 0.23061 58707 42440 178450 | 0.97304 48705 79823 838833 | 76 40 |
| 13 30 | 0.23344 53638 55905 411768 | 0.97236 99203 97676 601834 | 76 30 |
| 13 40 | 0.23627 28816 50641 314729 | 0.97168 67424 20880 229805 | 76 20 |
| 13 50 | 0.23909 84002 01354 340256 | 0.97099 53424 30205 995055 | 76 10 |
| 14 0 | 0.24192 18955 99667 722560 | 0.97029 57262 75996 472306 | 76 0 |
| | $\cos (90 - \alpha)$ | $\sin (90 - \alpha)$ | $90 - \alpha$ |

| $\alpha$ | sin $\alpha$ | cos $\alpha$ | |
|---|---|---|---|
| 14° 0' | 0.24192 18955 99667 722560 | 0.97029 57262 75996 472306 | 76° 0' |
| 14 10 | 0.24474 33439 54323 779998 | 0.96958 78998 78116 035499 | 75 50 |
| 14 20 | 0.24756 27213 91386 073075 | 0.96887 18692 25900 766333 | 75 40 |
| 14 30 | 0.25038 00040 54441 415886 | 0.96814 76403 78107 774967 | 75 30 |
| 14 40 | 0.25319 51681 04801 739278 | 0.96741 52194 62863 933304 | 75 20 |
| 14 50 | 0.25600 81897 21705 804030 | 0.96667 46126 77614 021304 | 75 10 |
| 15 0 | 0.25881 90451 02520 762349 | 0.96592 58262 89068 286750 | 75 0 |
| 15 10 | 0.26162 77104 62943 565964 | 0.96516 88666 33149 418923 | 74 50 |
| 15 20 | 0.26443 41620 37202 219124 | 0.96440 37401 14938 936626 | 74 40 |
| 15 30 | 0.26723 83760 78256 874793 | 0.96363 04532 08622 991022 | 74 30 |
| 15 40 | 0.27004 03288 58000 772346 | 0.96284 90124 57437 583722 | 74 20 |
| 15 50 | 0.27283 99966 67461 015048 | 0.96205 94244 73613 200622 | 74 10 |
| 16 0 | 0.27563 73558 16999 185650 | 0.96126 16959 38318 861916 | 74 0 |
| 16 10 | 0.27843 23826 36511 798364 | 0.96045 58336 01605 588798 | 73 50 |
| 16 20 | 0.28122 50534 75630 585557 | 0.95964 18442 82349 287299 | 73 40 |
| 16 30 | 0.28401 53447 03922 617444 | 0.95881 97348 68193 049761 | 73 30 |
| 16 40 | 0.28680 32327 11090 253103 | 0.95798 95123 15488 874437 | 73 20 |
| 16 50 | 0.28958 86939 07170 921108 | 0.95715 11836 49238 803695 | 73 10 |
| 17 0 | 0.29237 17047 22736 728097 | 0.95630 47559 63035 481339 | 73 0 |
| 17 10 | 0.29515 22416 09093 893589 | 0.95545 02364 19002 129541 | 72 50 |
| 17 20 | 0.29793 02810 38482 009348 | 0.95458 76322 47731 945903 | 72 40 |
| 17 30 | 0.30070 57995 04273 121623 | 0.95371 69507 48226 921144 | 72 30 |
| 17 40 | 0.30347 87735 21170 634575 | 0.95283 81992 87836 077947 | 72 20 |
| 17 50 | 0.30624 91796 25408 033205 | 0.95195 13853 02193 131480 | 72 10 |
| 18 0 | 0.30901 69943 74947 424102 | 0.95105 65162 95153 572116 | 72 0 |
| 18 10 | 0.31178 21943 49677 892334 | 0.95015 35998 38731 170898 | 71 50 |
| 18 20 | 0.31454 47561 51613 672802 | 0.94924 26435 73033 908261 | 71 40 |
| 18 30 | 0.31730 46564 05092 134377 | 0.94832 36552 06199 326589 | 71 30 |
| 18 40 | 0.32006 18717 56971 575157 | 0.94739 66425 14329 307115 | 71 20 |
| 18 50 | 0.32281 63788 76828 827146 | 0.94646 16133 41424 271744 | 71 10 |
| 19 0 | 0.32556 81544 57156 668714 | 0.94551 85755 99316 810348 | 71 0 |
| 19 10 | 0.32831 71752 13561 043139 | 0.94456 75372 67604 734089 | 70 50 |
| 19 20 | 0.33106 34178 84958 081585 | 0.94360 85063 93583 555339 | 70 40 |
| 19 30 | 0.33380 68592 33770 928828 | 0.94264 14910 92178 394777 | 70 30 |
| 19 40 | 0.33654 74760 46126 370090 | 0.94166 64995 45875 316224 | 70 20 |
| 19 50 | 0.33928 52451 32051 257284 | 0.94068 35400 04652 089810 | 70 10 |
| 20 0 | 0.34202 01433 25668 733044 | 0.93969 26207 85908 384054 | 70 0 |
| 20 10 | 0.34475 21474 85394 250851 | 0.93869 37502 74395 387444 | 69 50 |
| 20 20 | 0.34748 12344 94131 389611 | 0.93768 69369 22144 860118 | 69 40 |
| 20 30 | 0.35020 73812 59467 461026 | 0.93667 21892 48397 616250 | 69 30 |
| 20 40 | 0.35293 05647 13868 908097 | 0.93564 95158 39531 437727 | 69 20 |
| 20 50 | 0.35565 07618 14876 493116 | 0.93461 89253 48988 419756 | 69 10 |
| 21 0 | 0.35836 79495 45300 273484 | 0.93358 04264 97201 748990 | 69 0 |
| | cos $(90-\alpha)$ | sin $(90-\alpha)$ | $90-\alpha$ |

| $\alpha$ | $\sin \alpha$ | $\cos \alpha$ | |
|---|---|---|---|
| 21° 0′ | 0.35836 79495 45300 273484 | 0.93358 04264 97201 748990 | 69° 0′ |
| 21 10 | 0.36108 21049 13414 363715 | 0.93253 40280 71521 914808 | 68 50 |
| 21 20 | 0.36379 32049 53151 481968 | 0.93147 97389 26142 354365 | 68 40 |
| 21 30 | 0.36650 12267 24297 279474 | 0.93041 75679 82024 532045 | 68 30 |
| 21 40 | 0.36920 61473 12684 451200 | 0.92934 75242 26822 453955 | 68 20 |
| 21 50 | 0.37190 79438 30386 626114 | 0.92826 96167 14806 618088 | 68 10 |
| 22 0 | 0.37460 65934 15912 035415 | 0.92718 38545 66787 400806 | 68 0 |
| 22 10 | 0.37730 20732 34396 957079 | 0.92609 02469 70037 880295 | 67 50 |
| 22 20 | 0.37999 43604 77798 935091 | 0.92498 88031 78216 097629 | 67 40 |
| 22 30 | 0.38268 34323 65089 771728 | 0.92387 95325 11286 756128 | 67 30 |
| 22 40 | 0.38536 92661 42448 291257 | 0.92276 24443 55442 359639 | 67 20 |
| 22 50 | 0.38805 18390 83452 873418 | 0.92163 75481 63023 790437 | 67 10 |
| 23 0 | 0.39073 11284 89273 755062 | 0.92050 48534 52440 327397 | 67 0 |
| 23 10 | 0.39340 71116 88865 098325 | 0.91936 43698 08089 105132 | 66 50 |
| 23 20 | 0.39607 97660 39156 823696 | 0.91821 61068 80274 014759 | 66 40 |
| 23 30 | 0.39874 90689 25246 206372 | 0.91706 00743 85124 046995 | 66 30 |
| 23 40 | 0.40141 49977 60589 234271 | 0.91589 62821 04511 078267 | 66 20 |
| 23 50 | 0.40407 75299 87191 726085 | 0.91472 47398 85967 100530 | 66 10 |
| 24 0 | 0.40673 66430 75800 207754 | 0.91354 54576 42600 895502 | 66 0 |
| 24 10 | 0.40939 23145 26092 545754 | 0.91235 84453 53014 154009 | 65 50 |
| 24 20 | 0.41204 45218 66868 335573 | 0.91116 37130 61217 041159 | 65 40 |
| 24 30 | 0.41469 32426 56239 043773 | 0.90996 12708 76543 208055 | 65 30 |
| 24 40 | 0.41733 84544 81817 902030 | 0.90875 11289 73564 250770 | 65 20 |
| 24 50 | 0.41998 01349 60909 551540 | 0.90753 32975 92003 617301 | 65 10 |
| 25 0 | 0.42261 82617 40699 436187 | 0.90630 77870 36649 963243 | 65 0 |
| 25 10 | 0.42525 28124 98442 942873 | 0.90507 46076 77269 956893 | 64 50 |
| 25 20 | 0.42788 37649 41654 287411 | 0.90383 37699 48520 534557 | 64 40 |
| 25 30 | 0.43051 10968 08295 144376 | 0.90258 52843 49860 606763 | 64 30 |
| 25 40 | 0.43313 47858 66963 019326 | 0.90132 91614 45462 216157 | 64 20 |
| 25 50 | 0.43575 48099 17079 361793 | 0.90006 54118 64121 147824 | 64 10 |
| 26 0 | 0.43837 11467 89077 417453 | 0.89879 40462 99166 992782 | 64 0 |
| 26 10 | 0.44098 37743 44589 817890 | 0.89751 50755 08372 665424 | 63 50 |
| 26 20 | 0.44359 26704 76635 906365 | 0.89622 85103 13863 375664 | 63 40 |
| 26 30 | 0.44619 78131 09808 797997 | 0.89493 43616 02025 056560 | 63 30 |
| 26 40 | 0.44879 91802 00462 172785 | 0.89363 26403 23412 248193 | 63 20 |
| 26 50 | 0.45139 67497 36896 799885 | 0.89232 33574 92655 438572 | 63 10 |
| 27 0 | 0.45399 04997 39546 791560 | 0.89100 65241 88367 862360 | 63 0 |
| 27 10 | 0.45658 04082 61165 585239 | 0.88968 21515 53051 758199 | 62 50 |
| 27 20 | 0.45916 64533 87011 652090 | 0.88835 02507 93004 085439 | 62 40 |
| 27 30 | 0.46174 86132 35033 930563 | 0.88701 08331 78221 701055 | 62 30 |
| 27 40 | 0.46432 68659 56056 983310 | 0.88566 39100 42305 997566 | 62 20 |
| 27 50 | 0.46690 11897 33965 875928 | 0.88430 94927 82367 002760 | 62 10 |
| 28 0 | 0.46947 15627 85890 775959 | 0.88294 75928 58926 942032 | 62 0 |
| | $\cos (90 - \alpha)$ | $\sin (90 - \alpha)$ | $90 - \alpha$ |

| $\alpha$ | sin $\alpha$ | cos $\alpha$ | |
|---|---|---|---|
| 28° 0' | 0.46947 15627 85890 775959 | 0.88294 75928 58926 942032 | 62° 0' |
| 28 10 | 0.47203 79633 62391 270584 | 0.88157 82217 95823 264153 | 61 50 |
| 28 20 | 0.47460 03697 47640 401444 | 0.88020 13911 80111 131294 | 61 40 |
| 28 30 | 0.47715 87602 59608 415049 | 0.87881 71126 61965 374130 | 61 30 |
| 28 40 | 0.47971 31132 50246 227198 | 0.87742 53979 54581 912845 | 61 20 |
| 28 50 | 0.48226 34071 05668 599878 | 0.87602 62588 34078 644885 | 61 10 |
| 29 0 | 0.48480 96202 46337 029075 | 0.87461 97071 39395 800285 | 61 0 |
| 29 10 | 0.48735 17311 27242 341963 | 0.87320 57547 72195 765423 | 60 50 |
| 29 20 | 0.48988 97182 38087 001915 | 0.87178 44136 96762 376046 | 60 40 |
| 29 30 | 0.49242 35601 03467 119799 | 0.87035 56959 39899 680416 | 60 30 |
| 29 40 | 0.49495 32352 83054 170025 | 0.86891 96135 90830 173437 | 60 20 |
| 29 50 | 0.49747 87223 71776 409791 | 0.86747 61788 01092 502620 | 60 10 |
| 30 0 | 0.50000 00000 00000 000000 | 0.86602 54037 84438 646764 | 60 0 |
| 30 10 | 0.50251 70468 33709 826325 | 0.86456 73008 16730 568196 | 59 50 |
| 30 20 | 0.50502 98415 74690 018874 | 0.86310 18822 35836 339482 | 59 40 |
| 30 30 | 0.50753 83629 60704 168939 | 0.86162 91604 41525 745451 | 59 30 |
| 30 40 | 0.51004 25897 65675 241303 | 0.86014 91478 95365 361443 | 59 20 |
| 30 50 | 0.51254 25007 99865 180583 | 0.85866 18571 20613 108652 | 59 10 |
| 31 0 | 0.51503 80749 10054 210082 | 0.85716 73007 02112 287465 | 59 0 |
| 31 10 | 0.51752 92909 79719 821641 | 0.85566 54912 86185 089690 | 58 50 |
| 31 20 | 0.52001 61279 29215 454977 | 0.85415 64415 80525 590574 | 58 40 |
| 31 30 | 0.52249 85647 15948 864988 | 0.85264 01643 54092 221519 | 58 30 |
| 31 40 | 0.52497 65803 34560 175518 | 0.85111 66724 36999 724405 | 58 20 |
| 31 50 | 0.52745 01538 17099 618084 | 0.84958 59787 20410 588429 | 58 10 |
| 32 0 | 0.52991 92642 33204 954047 | 0.84804 80961 56425 970386 | 58 0 |
| 32 10 | 0.53238 38906 90278 578734 | 0.84650 30377 57976 099316 | 57 50 |
| 32 20 | 0.53484 40123 33664 306018 | 0.84495 08165 98710 166431 | 57 40 |
| 32 30 | 0.53729 96083 46823 831841 | 0.84339 14458 12885 701273 | 57 30 |
| 32 40 | 0.53975 06579 51512 875212 | 0.84182 49385 95257 435021 | 57 20 |
| 32 50 | 0.54219 71404 07956 995169 | 0.84025 13082 00965 651901 | 57 10 |
| 33 0 | 0.54463 90350 15027 082224 | 0.83867 05679 45424 029638 | 57 0 |
| 33 10 | 0.54707 63211 10414 522814 | 0.83708 27312 04206 969893 | 56 50 |
| 33 20 | 0.54950 89780 70806 035263 | 0.83548 78114 12936 419654 | 56 40 |
| 33 30 | 0.55193 69853 12058 175782 | 0.83388 58220 67168 184523 | 56 30 |
| 33 40 | 0.55436 03222 89371 513035 | 0.83227 67767 22277 734869 | 56 20 |
| 33 50 | 0.55677 89684 97464 469785 | 0.83066 06889 93345 505812 | 56 10 |
| 34 0 | 0.55919 29034 70746 830160 | 0.82903 75725 55041 692006 | 56 0 |
| 34 10 | 0.56160 21067 83492 911070 | 0.82740 74411 41510 538204 | 55 50 |
| 34 20 | 0.56400 65580 50014 396298 | 0.82577 03085 46254 126569 | 55 40 |
| 34 30 | 0.56640 62369 24832 831822 | 0.82412 61886 22015 661730 | 55 30 |
| 34 40 | 0.56880 11231 02851 780886 | 0.82247 50952 80662 254563 | 55 20 |
| 34 50 | 0.57119 11963 19528 637388 | 0.82081 70424 93067 205690 | 55 10 |
| 35 0 | 0.57357 64363 51046 096108 | 0.81915 20442 88991 789684 | 55 0 |
| | cos $(90-\alpha)$ | sin $(90-\alpha)$ | $90-\alpha$ |

| $\alpha$ | sin $\alpha$ | cos $\alpha$ | |
|---|---|---|---|
| 35° 0′ | 0.57357 64363 51046 096108 | 0.81915 20442 88991 789684 | 55° 0′ |
| 35 10 | 0.57595 68230 14483 278337 | 0.81748 01147 56966 541006 | 54 50 |
| 35 20 | 0.57833 23361 67986 511461 | 0.81580 12680 44172 042639 | 54 40 |
| 35 30 | 0.58070 29557 10939 761050 | 0.81411 55183 56319 218466 | 54 30 |
| 35 40 | 0.58306 86615 84134 714008 | 0.81242 28799 57529 130381 | 54 20 |
| 35 50 | 0.58542 94337 69940 511350 | 0.81072 33671 70212 281159 | 54 10 |
| 36 0 | 0.58778 52522 92473 129169 | 0.80901 69943 74947 424102 | 54 0 |
| 36 10 | 0.59013 60972 17764 406356 | 0.80730 37760 10359 880496 | 53 50 |
| 36 20 | 0.59248 19486 53930 717648 | 0.80558 37265 72999 365894 | 53 40 |
| 36 30 | 0.59482 27867 51341 290569 | 0.80385 68606 17217 326271 | 53 30 |
| 36 40 | 0.59715 85917 02786 164852 | 0.80212 31927 55043 785083 | 53 20 |
| 36 50 | 0.59948 93437 43643 792904 | 0.80038 27376 56063 702276 | 53 10 |
| 37 0 | 0.60181 50231 52048 279918 | 0.79863 55100 47292 846284 | 53 0 |
| 37 10 | 0.60413 56102 49056 262190 | 0.79688 15247 13053 180076 | 52 50 |
| 37 20 | 0.60645 10853 98813 422256 | 0.79512 07964 94847 762300 | 52 40 |
| 37 30 | 0.60876 14290 08720 639416 | 0.79335 33402 91235 164580 | 52 30 |
| 37 40 | 0.61106 66215 29599 774262 | 0.79157 91710 57703 406041 | 52 20 |
| 37 50 | 0.61336 66434 55859 085782 | 0.78979 83038 06543 406113 | 52 10 |
| 38 0 | 0.61566 14753 25658 279669 | 0.78801 07536 06721 956694 | 52 0 |
| 38 10 | 0.61795 10977 21073 186408 | 0.78621 65355 83754 214749 | 51 50 |
| 38 20 | 0.62023 54912 68260 067774 | 0.78441 56649 19575 716415 | 51 40 |
| 38 30 | 0.62251 46366 37619 550336 | 0.78260 81568 52413 913700 | 51 30 |
| 38 40 | 0.62478 85145 43960 184581 | 0.78079 40266 76659 234869 | 51 20 |
| 38 50 | 0.62705 71057 46661 628279 | 0.77897 32897 42735 669595 | 51 10 |
| 39 0 | 0.62932 03910 49837 452706 | 0.77714 59614 56970 879980 | 51 0 |
| 39 10 | 0.63157 83513 02497 570344 | 0.77531 20572 81465 838542 | 50 50 |
| 39 20 | 0.63383 09673 98710 282690 | 0.77347 15927 33963 994273 | 50 40 |
| 39 30 | 0.63607 82202 77763 946799 | 0.77162 45833 87719 067867 | 50 30 |
| 39 40 | 0.63832 00909 24328 259190 | 0.76977 10448 71367 777245 | 50 20 |
| 39 50 | 0.64055 65603 68615 155757 | 0.76791 09928 68788 594471 | 50 10 |
| 40 0 | 0.64278 76096 86539 326323 | 0.76604 44431 18978 035202 | 50 0 |
| 40 10 | 0.64501 32199 99878 342465 | 0.76417 14114 15912 981769 | 49 50 |
| 40 20 | 0.64723 33724 76432 397282 | 0.76229 19136 08417 941039 | 49 40 |
| 40 30 | 0.64944 80483 30183 655726 | 0.76040 59656 00030 938175 | 49 30 |
| 40 40 | 0.65165 72288 21455 214165 | 0.75851 35833 48868 947431 | 49 20 |
| 40 50 | 0.65386 08952 57069 667826 | 0.75661 47828 67492 861128 | 49 10 |
| 41 0 | 0.65605 90289 90507 284782 | 0.75470 95802 22771 997943 | 49 0 |
| 41 10 | 0.65825 16114 22063 785141 | 0.75279 79915 35748 151663 | 48 50 |
| 41 20 | 0.66043 86239 99007 724093 | 0.75088 00329 81499 181554 | 48 40 |
| 41 30 | 0.66262 00482 15737 477503 | 0.74895 57207 89002 145503 | 48 30 |
| 41 40 | 0.66479 58656 13937 828709 | 0.74702 50712 40995 977081 | 48 20 |
| 41 50 | 0.66696 60577 82736 155193 | 0.74508 81006 73843 707698 | 48 10 |
| 42 0 | 0.66913 06063 58858 213826 | 0.74314 48254 77394 235015 | 48 0 |
| | cos (90 — $\alpha$) | sin (90 — $\alpha$) | 90 — $\alpha$ |

| $\alpha$ | sin $\alpha$ | cos $\alpha$ | |
|---|---|---|---|
| 42° 0′ | 0.66913 06063 58858 213826 | 0.74314 48254 77394 235015 | 48° 0′ |
| 42 10 | 0.67128 94930 26783 523342 | 0.74119 52620 94843 638774 | 47 50 |
| 42 20 | 0.67344 26995 18900 342749 | 0.73923 94270 22596 045235 | 47 40 |
| 42 30 | 0.67559 02076 15660 244348 | 0.73727 73368 10124 041384 | 47 30 |
| 42 40 | 0.67773 19991 45732 280070 | 0.73530 90080 59828 640093 | 47 20 |
| 42 50 | 0.67986 80559 86156 739805 | 0.73333 44574 26898 797428 | 47 10 |
| 43 0 | 0.68199 83600 62498 500442 | 0.73135 37016 19170 483288 | 47 0 |
| 43 10 | 0.68412 28933 48999 964310 | 0.72936 67573 96985 306557 | 46 50 |
| 43 20 | 0.68624 16378 68733 585730 | 0.72737 36415 73048 695987 | 46 40 |
| 43 30 | 0.68835 45756 93753 984389 | 0.72537 43710 12287 637993 | 46 30 |
| 43 40 | 0.69046 16889 45249 644248 | 0.72336 89626 31707 972570 | 46 20 |
| 43 50 | 0.69256 29597 93694 196691 | 0.72135 74334 00251 248542 | 46 10 |
| 44 0 | 0.69465 83704 58997 286656 | 0.71933 98003 38651 139356 | 46 0 |
| 44 10 | 0.69674 79032 10655 020451 | 0.71731 60805 19289 420624 | 45 50 |
| 44 20 | 0.69883 15403 67899 993988 | 0.71528 62910 66051 510647 | 45 40 |
| 44 30 | 0.70090 92642 99850 900173 | 0.71325 04491 54181 575136 | 45 30 |
| 44 40 | 0.70298 10574 25661 714180 | 0.71120 85720 10137 197349 | 45 20 |
| 44 50 | 0.70504 69022 14670 455340 | 0.70916 06769 11443 614893 | 45 10 |
| 45 0 | 0.70710 67811 86547 524401 | 0.70710 67811 86547 524401 | 45 0 |
| | cos $(90 - \alpha)$ | sin $(90 - \alpha)$ | $90 - \alpha$ |

# Tafel II.

Einundzwanzigstellige Werte der Funktionen Sinus und Cosinus nebst ihren Differenzen für jede Bogensekunde von 0° 0′ bis 0° 10′.

| $\Delta\alpha$ | sin $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 0′ 0″ | 0.00000 00000 00000 000000 | | | |
| | | 48481 36811 076368 | 0 | 113953 |
| 1 | 0.00000 48481 36811 076368 | | 113953 | |
| | | 48481 36810 962415 | | 113952 |
| 2 | 0.00000 96962 73622 038783 | | 227905 | |
| | | 48481 36810 734510 | | 113954 |
| 3 | 0.00001 45444 10432 773293 | | 341859 | |
| | | 48481 36810 392651 | | 113951 |
| 4 | 0.00001 93925 47243 165944 | | 455810 | |
| | | 48481 36809 936841 | | 113953 |
| 0 5 | 0.00002 42406 84053 102785 | | 569763 | |
| | | 48481 36809 367078 | | 113954 |
| 6 | 0.00002 90888 20862 469863 | | 683717 | |
| | | 48481 36808 683361 | | 113952 |
| 7 | 0.00003 39369 57671 153224 | | 797669 | |
| | | 48481 36807 885692 | | 113952 |
| 8 | 0.00003 87850 94479 038916 | | 911621 | |
| | | 48481 36806 974071 | | 113953 |
| 9 | 0.00004 36332 31286 012987 | | 1 025574 | |
| | | 48481 36805 948497 | | 113954 |
| 0 10 | 0.00004 84813 68091 961484 | | 1 139528 | |
| | | 48481 36804 808969 | | 113951 |
| 11 | 0.00005 33295 04896 770453 | | 1 253479 | |
| | | 48481 36803 555490 | | 113953 |
| 12 | 0.00005 81776 41700 325943 | | 1 367432 | |
| | | 48481 36802 188058 | | 113954 |
| 13 | 0.00006 30257 78502 514001 | | 1 481386 | |
| | | 48481 36800 706672 | | 113951 |
| 14 | 0.00006 78739 15303 220673 | | 1 595337 | |
| | | 48481 36799 111335 | | 113953 |
| 0 15 | 0.00007 27220 52102 332008 | | 1 709290 | |
| | | 48481 36797 402045 | | 113954 |
| 16 | 0.00007 75701 88899 734053 | | 1 823244 | |
| | | 48481 36795 578801 | | 113952 |
| 17 | 0.00008 24183 25695 312854 | | 1 937196 | |
| | | 48481 36793 641605 | | 113952 |
| 18 | 0.00008 72664 62488 954459 | | 2 051148 | |
| | | 48481 36791 590457 | | 113953 |
| 19 | 0.00009 21145 99280 544916 | | 2 165101 | |
| | | 48481 36789 425356 | | 113953 |
| 0 20 | 0.00009 69627 36069 970272 | | 2 279054 | |
| | | 48481 36787 146302 | | 113953 |
| 21 | 0.00010 18108 72857 116574 | | 2 393007 | |
| | | 48481 36784 753295 | | 113952 |
| 22 | 0.00010 66590 09641 869869 | | 2 506959 | |
| | | 48481 36782 246336 | | 113952 |
| 23 | 0.00011 15071 46424 116205 | | 2 620911 | |
| | | 48481 36779 625425 | | 113955 |
| 24 | 0.00011 63552 83203 741630 | | 2 734866 | |
| | | 48481 36776 890559 | | 113951 |
| 0 25 | 0.00012 12034 19980 632189 | | 2 848817 | |
| | | 48481 36774 041742 | | 113953 |
| 26 | 0.00012 60515 56754 673931 | | 2 962770 | |
| | | 48481 36771 078972 | | 113953 |
| 27 | 0.00013 08996 93525 752903 | | 3 076723 | |
| | | 48481 36768 002249 | | 113952 |
| 28 | 0.00013 57478 30293 755152 | | 3 190675 | |
| | | 48481 36764 811574 | | 113954 |
| 29 | 0.00014 05959 67058 566726 | | 3 304629 | |
| | | 48481 36761 506945 | | 113951 |
| 0 30 | 0.00014 54441 03820 073671 | | 3 418580 | |
| | | 48481 36758 088365 | | 113953 |
| 31 | 0.00015 02922 40578 162036 | | 3 532533 | |
| | | 48481 36754 555832 | | 113954 |
| 32 | 0.00015 51403 77332 717868 | | 3 646487 | |
| | | 48481 36750 909345 | | 113952 |
| 33 | 0.00015 99885 14083 627213 | | 3 760439 | |
| | | 48481 36747 148906 | | 113953 |
| 34 | 0.00016 48366 50830 776119 | | 3 874392 | |
| | | 48481 36743 274514 | | 113952 |
| 0 35 | 0.00016 96847 87574 050633 | | 3 988344 | |
| | | 48481 36739 286170 | | 113952 |
| 36 | 0.00017 45329 24313 336803 | | 4 102296 | |
| | | 48481 36735 183874 | | 113955 |
| 37 | 0.00017 93810 61048 520677 | | 4 216251 | |
| | | 48481 36730 967623 | | 113951 |
| 38 | 0.00018 42291 97779 488300 | | 4 330202 | |
| | | 48481 36726 637421 | | 113953 |
| 39 | 0.00018 90773 34506 125721 | | 4 444155 | |
| | | 48481 36722 193266 | | 113952 |
| 0 40 | 0.00019 39254 71228 318987 | | 4 558107 | |

| $\Delta\alpha$ | $\cos \Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 0′ 0″ | 1.00000 00000 00000 000000 | | | |
| | | 11752 215270 | 23504 430540 | 2 |
| 1 | 0.99999 99999 88247 784730 | | 23504 430538 | |
| | | 35256 645808 | | 0 |
| 2 | 0.99999 99999 52991 138922 | | 23504 430538 | |
| | | 58761 076346 | | 1 |
| 3 | 0.99999 99998 94230 062576 | | 23504 430537 | |
| | | 82265 506883 | | 3 |
| 4 | 0.99999 99998 11964 555693 | | 23504 430534 | |
| | | 1 05769 937417 | | 1 |
| 0 5 | 0.99999 99997 06194 618276 | | 23504 430533 | |
| | | 1 29274 367950 | | 4 |
| 6 | 0.99999 99995 76920 250326 | | 23504 430529 | |
| | | 1 52778 798479 | | 4 |
| 7 | 0.99999 99994 24141 451847 | | 23504 430525 | |
| | | 1 76283 229004 | | 4 |
| 8 | 0.99999 99992 47858 222843 | | 23504 430521 | |
| | | 1 99787 659525 | | 3 |
| 9 | 0.99999 99990 48070 563318 | | 23504 430518 | |
| | | 2 23292 090043 | | 8 |
| 0 10 | 0.99999 99988 24778 473275 | | 23504 430510 | |
| | | 2 46796 520553 | | 3 |
| 11 | 0.99999 99985 77981 952722 | | 23504 430507 | |
| | | 2 70300 951060 | | 9 |
| 12 | 0.99999 99983 07681 001662 | | 23504 430498 | |
| | | 2 93805 381558 | | 5 |
| 13 | 0.99999 99980 13875 620104 | | 23504 430493 | |
| | | 3 17309 812051 | | 8 |
| 14 | 0.99999 99976 96565 808053 | | 23504 430485 | |
| | | 3 40814 242536 | | 8 |
| 0 15 | 0.99999 99973 55751 565517 | | 23504 430477 | |
| | | 3 64318 673013 | | 9 |
| 16 | 0.99999 99969 91432 892504 | | 23504 430468 | |
| | | 3 87823 103481 | | 9 |
| 17 | 0.99999 99966 03609 789023 | | 23504 430459 | |
| | | 4 11327 533940 | | 9 |
| 18 | 0.99999 99961 92282 255083 | | 23504 430450 | |
| | | 4 34831 964390 | | 10 |
| 19 | 0.99999 99957 57450 290693 | | 23504 430440 | |
| | | 4 58336 394830 | | 13 |
| 0 20 | 0.99999 99952 99113 895863 | | 23504 430427 | |
| | | 4 81840 825257 | | 9 |
| 21 | 0.99999 99948 17273 070606 | | 23504 430418 | |
| | | 5 05345 255675 | | 12 |
| 22 | 0.99999 99943 11927 814931 | | 23504 430406 | |
| | | 5 28849 686081 | | 14 |
| 23 | 0.99999 99937 83078 128850 | | 23504 430392 | |
| | | 5 52354 116473 | | 12 |
| 24 | 0.99999 99932 30724 012377 | | 23504 430380 | |
| | | 5 75858 546853 | | 13 |
| 0 25 | 0.99999 99926 54865 465524 | | 23504 430367 | |
| | | 5 99362 977220 | | 15 |
| 26 | 0.99999 99920 55502 488304 | | 23504 430352 | |
| | | 6 22867 407572 | | 14 |
| 27 | 0.99999 99914 32635 080732 | | 23504 430338 | |
| | | 6 46371 837910 | | 16 |
| 28 | 0.99999 99907 86263 242822 | | 23504 430322 | |
| | | 6 69876 268232 | | 15 |
| 29 | 0.99999 99901 16386 974590 | | 23504 430307 | |
| | | 6 93380 698539 | | 17 |
| 0 30 | 0.99999 99894 23006 276051 | | 23504 430290 | |
| | | 7 16885 128829 | | 16 |
| 31 | 0.99999 99887 06121 147222 | | 23504 430274 | |
| | | 7 40389 559103 | | 18 |
| 32 | 0.99999 99879 65731 588119 | | 23504 430256 | |
| | | 7 63893 989359 | | 18 |
| 33 | 0.99999 99872 01837 598760 | | 23504 430238 | |
| | | 7 87398 419597 | | 18 |
| 34 | 0.99999 99864 14439 179163 | | 23504 430220 | |
| | | 8 10902 849817 | | 19 |
| 0 35 | 0.99999 99856 03536 329346 | | 23504 430201 | |
| | | 8 34407 280018 | | 20 |
| 36 | 0.99999 99847 69129 049328 | | 23504 430181 | |
| | | 8 57911 710199 | | 20 |
| 37 | 0.99999 99839 11217 339129 | | 23504 430161 | |
| | | 8 81416 140360 | | 21 |
| 38 | 0.99999 99830 29801 198769 | | 23504 430140 | |
| | | 9 04920 570500 | | 22 |
| 39 | 0.99999 99821 24880 628269 | | 23504 430118 | |
| | | 9 28425 000618 | | 20 |
| 0 40 | 0.99999 99811 96455 627651 | | 23504 430098 | |

| $\Delta\alpha$ | sin $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 0' 40" | 0.00019 39254 71228 318987 | | | |
| | | 48481 36717 635159 | 4 558107 | |
| 41 | 0.00019 87736 07945 954146 | | | 113955 |
| | | 48481 36712 963097 | 4 672062 | |
| 42 | 0.00020 36217 44658 917243 | | | 113950 |
| | | 48481 36708 177085 | 4 786012 | |
| 43 | 0.00020 84698 81367 094328 | | | 113954 |
| | | 48481 36703 277119 | 4 899966 | |
| 44 | 0.00021 33180 18070 371447 | | | 113953 |
| | | 48481 36698 263200 | 5 013919 | |
| 0 45 | 0.00021 81661 54768 634647 | | | 113952 |
| | | 48481 36693 135329 | 5 127871 | |
| 46 | 0.00022 30142 91461 769976 | | | 113953 |
| | | 48481 36687 893505 | 5 241824 | |
| 47 | 0.00022 78624 28149 663481 | | | 113952 |
| | | 48481 36682 537729 | 5 355776 | |
| 48 | 0.00023 27105 64832 201210 | | | 113954 |
| | | 48481 36677 067999 | 5 469730 | |
| 49 | 0.00023 75587 01509 269209 | | | 113952 |
| | | 48481 36671 484317 | 5 583682 | |
| 0 50 | 0.00024 24068 38180 753526 | | | 113952 |
| | | 48481 36665 786683 | 5 697634 | |
| 51 | 0.00024 72549 74846 540209 | | | 113954 |
| | | 48481 36659 975095 | 5 811588 | |
| 52 | 0.00025 21031 11506 515304 | | | 113952 |
| | | 48481 36654 049555 | 5 925540 | |
| 53 | 0.00025 69512 48160 564859 | | | 113953 |
| | | 48481 36648 010062 | 6 039493 | |
| 54 | 0.00026 17993 84808 574921 | | | 113952 |
| | | 48481 36641 856617 | 6 153445 | |
| 0 55 | 0.00026 66475 21450 431538 | | | 113953 |
| | | 48481 36635 589219 | 6 267398 | |
| 56 | 0.00027 14956 58086 020757 | | | 113953 |
| | | 48481 36629 207868 | 6 381351 | |
| 57 | 0.00027 63437 94715 228625 | | | 113952 |
| | | 48481 36622 712564 | 6 495304 | |
| 58 | 0.00028 11919 31337 941189 | | | 113953 |
| | | 48481 36616 103308 | 6 609256 | |
| 59 | 0.00028 60400 67954 044497 | | | 113952 |
| | | 48481 36609 380099 | 6 723209 | |
| 1 0 | 0.00029 08882 04563 424596 | | | 113954 |
| | | 48481 36602 542938 | 6 837161 | |
| 1 | 0.00029 57363 41165 967534 | | | 113951 |
| | | 48481 36595 591823 | 6 951115 | |
| 2 | 0.00030 05844 77761 559357 | | | 113955 |
| | | 48481 36588 516757 | 7 075066 | |
| 3 | 0.00030 54326 14350 086114 | | | 113950 |
| | | 48481 36581 347736 | 7 169021 | |
| 4 | 0.00031 02807 50931 433850 | | | 113955 |
| | | 48481 36574 054765 | 7 292971 | |
| 1 5 | 0.00031 51288 87505 488615 | | | 113952 |
| | | 48481 36566 647839 | 7 406926 | |
| 6 | 0.00031 99770 24072 136454 | | | 113951 |
| | | 48481 36559 126961 | 7 520878 | |
| 7 | 0.00032 48251 60631 263415 | | | 113955 |
| | | 48481 36551 492132 | 7 634829 | |
| 8 | 0.00032 96732 97182 755547 | | | 113952 |
| | | 48481 36543 743348 | 7 748784 | |
| 9 | 0.00033 45214 33726 498895 | | | 113953 |
| | | 48481 36535 880612 | 7 862736 | |
| 1 10 | 0.00033 93695 70262 379507 | | | 113951 |
| | | 48481 36527 903923 | 7 976689 | |
| 11 | 0.00034 42177 06790 283430 | | | 113954 |
| | | 48481 36519 813283 | 8 090640 | |
| 12 | 0.00034 90658 43310 096713 | | | 113953 |
| | | 48481 36511 608689 | 8 204594 | |
| 13 | 0.00035 39139 79821 705402 | | | 113952 |
| | | 48481 36503 290142 | 8 318547 | |
| 14 | 0.00035 87621 16324 995544 | | | 113954 |
| | | 48481 36494 857643 | 8 432499 | |
| 1 15 | 0.00036 36102 52819 853187 | | | 113950 |
| | | 48481 36486 311190 | 8 546453 | |
| 16 | 0.00036 84583 89306 164377 | | | 113955 |
| | | 48481 36477 650787 | 8 660403 | |
| 17 | 0.00037 33065 25783 815164 | | | 113952 |
| | | 48481 36468 876429 | 8 774358 | |
| 18 | 0.00037 81546 62252 691593 | | | 113953 |
| | | 48481 36459 988119 | 8 888310 | |
| 19 | 0.00038 30027 98712 679712 | | | 113952 |
| | | 48481 36450 985856 | 9 002263 | |
| 1 20 | 0.00038 78509 35163 665568 | | 9 116215 | |

| $\Delta\alpha$ | cos $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 0′ 40″ | 0.99999 99811 96455 627651 | | | |
| | | 9 51929 430716 | 23504 430098 | 23 |
| 41 | 0.99999 99802 44526 196935 | | 23504 430075 | |
| | | 9 75433 860791 | | 24 |
| 42 | 0.99999 99792 69092 336144 | | 23504 430051 | |
| | | 9 98938 290842 | | 22 |
| 43 | 0.99999 99782 70154 045302 | | 23504 430029 | |
| | | 10 22442 720871 | | 25 |
| 44 | 0.99999 99772 47711 324431 | | 23504 430004 | |
| | | 10 45947 150875 | | 24 |
| 0 45 | 0.99999 99762 01764 173556 | | | |
| | | 10 69451 580855 | 23504 429980 | 26 |
| 46 | 0.99999 99751 32312 592701 | | 23504 429954 | |
| | | 10 92956 010809 | | 25 |
| 47 | 0.99999 99740 39356 581892 | | 23504 429929 | |
| | | 11 16460 440738 | | 26 |
| 48 | 0.99999 99729 22896 141154 | | 23504 429903 | |
| | | 11 39964 870641 | | 28 |
| 49 | 0.99999 99717 82931 270513 | | 23504 429875 | |
| | | 11 63469 300516 | | 26 |
| 0 50 | 0.99999 99706 19461 969997 | | | |
| | | 11 86973 730365 | 23504 429849 | 28 |
| 51 | 0.99999 99694 32488 239632 | | 23504 429821 | |
| | | 12 10478 160186 | | 30 |
| 52 | 0.99999 99682 22010 079446 | | 23504 429791 | |
| | | 12 33982 589977 | | 27 |
| 53 | 0.99999 99669 88027 489469 | | 23504 429764 | |
| | | 12 57487 019741 | | 31 |
| 54 | 0.99999 99657 30540 469728 | | 23504 429733 | |
| | | 12 80991 449474 | | 29 |
| 0 55 | 0.99999 99644 49549 020254 | | | |
| | | 13 04495 879178 | 23504 429704 | 31 |
| 56 | 0.99999 99631 45053 141076 | | 23504 429673 | |
| | | 13 28000 308851 | | 32 |
| 57 | 0.99999 99618 17052 832225 | | 23504 429641 | |
| | | 13 51504 738492 | | 31 |
| 58 | 0.99999 99604 65548 093733 | | 23504 429610 | |
| | | 13 75009 168102 | | 32 |
| 59 | 0.99999 99590 90538 925631 | | 23504 429578 | |
| | | 13 98513 597680 | | 34 |
| 1 0 | 0.99999 99576 92025 327951 | | | |
| | | 14 22018 027224 | 23504 429544 | 33 |
| 1 | 0.99999 99562 70007 300727 | | 23504 429511 | |
| | | 14 45522 456735 | | 33 |
| 2 | 0.99999 99548 24484 843992 | | 23504 429478 | |
| | | 14 69026 886213 | | 36 |
| 3 | 0.99999 99533 55457 957779 | | 23504 429442 | |
| | | 14 92531 315655 | | 34 |
| 4 | 0.99999 99518 62926 642124 | | 23504 429408 | |
| | | 15 16035 745063 | | 36 |
| 1 5 | 0.99999 99503 46890 897061 | | | |
| | | 15 39540 174435 | 23504 429372 | 36 |
| 6 | 0.99999 99488 07350 722626 | | 23504 429336 | |
| | | 15 63044 603771 | | 38 |
| 7 | 0.99999 99472 44306 118855 | | 23504 429298 | |
| | | 15 86549 033069 | | 35 |
| 8 | 0.99999 99456 57757 085786 | | 23504 429263 | |
| | | 16 10053 462332 | | 40 |
| 9 | 0.99999 99440 47703 623454 | | 23504 429223 | |
| | | 16 33557 891555 | | 37 |
| 1 10 | 0.99999 99424 14145 731899 | | | |
| | | 16 57062 320741 | 23504 429186 | 39 |
| 11 | 0.99999 99407 57083 411158 | | 23504 429147 | |
| | | 16 80566 749888 | | 40 |
| 12 | 0.99999 99390 76516 661270 | | 23504 429107 | |
| | | 17 04071 178995 | | 41 |
| 13 | 0.99999 99373 72445 482275 | | 23504 429066 | |
| | | 17 27575 608061 | | 39 |
| 14 | 0.99999 99356 44869 874214 | | 23504 429027 | |
| | | 17 51080 037088 | | 41 |
| 1 15 | 0.99999 99338 93789 837126 | | | |
| | | 17 74584 466074 | 23504 428986 | 43 |
| 16 | 0.99999 99321 19205 371052 | | 23504 428943 | |
| | | 17 98088 895017 | | 42 |
| 17 | 0.99999 99303 21116 476035 | | 23504 428901 | |
| | | 18 21593 323918 | | 43 |
| 18 | 0.99999 99284 99523 152117 | | 23504 428858 | |
| | | 18 45097 752776 | | 42 |
| 19 | 0.99999 99266 54425 399341 | | 23504 428816 | |
| | | 18 68602 181592 | | 45 |
| 1 20 | 0.99999 99247 85823 217749 | | 23504 428771 | |

| $\Delta\alpha$ | sin $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 1′ 20″ | 0.00038 78509 35163 665568 | | | |
| | | 48481 36441 869641 | 9 116215 | |
| 21 | 0.00039 26990 71605 535209 | | | 113953 |
| | | 48481 36432 639473 | 9 230168 | |
| 22 | 0.00039 75472 08038 174682 | | | 113953 |
| | | 48481 36423 295352 | 9 344121 | |
| 23 | 0.00040 23953 44461 470034 | | | 113952 |
| | | 48481 36413 837279 | 9 458073 | |
| 24 | 0.00040 72434 80875 307313 | | | 113953 |
| | | 48481 36404 265253 | 9 572026 | |
| 1 25 | 0.00041 20916 17279 572566 | | | 113954 |
| | | 48481 36394 579273 | 9 685980 | |
| 26 | 0.00041 69397 53674 151839 | | | 113950 |
| | | 48481 36384 779343 | 9 799930 | |
| 27 | 0.00042 17878 90058 931182 | | | 113955 |
| | | 48481 36374 865458 | 9 913885 | |
| 28 | 0.00042 66360 26433 796640 | | | 113952 |
| | | 48481 36364 837621 | 10 027837 | |
| 29 | 0.00043 14841 62798 634261 | | | 113952 |
| | | 48481 36354 695832 | 10 141789 | |
| 1 30 | 0.00043 63322 99153 330093 | | | 113953 |
| | | 48481 36344 440090 | 10 255742 | |
| 31 | 0.00044 11804 35497 770183 | | | 113953 |
| | | 48481 36334 070395 | 10 369695 | |
| 32 | 0.00044 60285 71831 840578 | | | 113953 |
| | | 48481 36323 586747 | 10 483648 | |
| 33 | 0.00045 08767 08155 427325 | | | 113951 |
| | | 48481 36312 989146 | 10 597601 | |
| 34 | 0.00045 57248 44468 416471 | | | 113953 |
| | | 48481 36302 277594 | 10 711552 | |
| 1 35 | 0.00046 05729 80770 694065 | | | 113954 |
| | | 48481 36291 452089 | 10 825505 | |
| 36 | 0.00046 54211 17062 146154 | | | 113952 |
| | | 48481 36280 512630 | 10 939459 | |
| 37 | 0.00047 02692 53342 658784 | | | 113953 |
| | | 48481 36269 459219 | 11 053411 | |
| 38 | 0.00047 51173 89612 118003 | | | 113952 |
| | | 48481 36258 291855 | 11 167364 | |
| 39 | 0.00047 99655 25870 409858 | | | 113953 |
| | | 48481 36247 010539 | 11 281316 | |
| 1 40 | 0.00048 48136 62117 420397 | | | 113953 |
| | | 48481 36235 615270 | 11 395269 | |
| 41 | 0.00048 96617 98353 035667 | | | 113953 |
| | | 48481 36224 106048 | 11 509222 | |
| 42 | 0.00049 45099 34577 141715 | | | 113951 |
| | | 48481 36212 482873 | 11 623175 | |
| 43 | 0.00049 93580 70789 624588 | | | 113954 |
| | | 48481 36200 745747 | 11 737126 | |
| 44 | 0.00050 42062 06990 370335 | | | 113953 |
| | | 48481 36188 894667 | 11 851080 | |
| 1 45 | 0.00050 90543 43179 265002 | | | 113951 |
| | | 48481 36176 929634 | 11 965033 | |
| 46 | 0.00051 39024 79356 194636 | | | 113955 |
| | | 48481 36164 850650 | 12 078984 | |
| 47 | 0.00051 87506 15521 045286 | | | 113951 |
| | | 48481 36152 657711 | 12 192939 | |
| 48 | 0.00052 35987 51673 702997 | | | 113953 |
| | | 48481 36140 350821 | 12 306890 | |
| 49 | 0.00052 84468 87814 053818 | | | 113953 |
| | | 48481 36127 929978 | 12 420843 | |
| 1 50 | 0.00053 32950 23941 983796 | | | 113953 |
| | | 48481 36115 395182 | 12 534796 | |
| 51 | 0.00053 81431 60057 378978 | | | 113951 |
| | | 48481 36102 746433 | 12 648749 | |
| 52 | 0.00054 29912 96160 125411 | | | 113955 |
| | | 48481 36089 983733 | 12 762700 | |
| 53 | 0.00054 78394 32250 109144 | | | 113951 |
| | | 48481 36077 107078 | 12 876655 | |
| 54 | 0.00055 26875 68327 216222 | | | 113954 |
| | | 48481 36064 116472 | 12 990606 | |
| 1 55 | 0.00055 75357 04391 332694 | | | 113951 |
| | | 48481 36051 011912 | 13 104560 | |
| 56 | 0.00056 23838 40442 344606 | | | 113954 |
| | | 48481 36037 793401 | 13 218511 | |
| 57 | 0.00056 72319 76480 138007 | | | 113952 |
| | | 48481 36024 460936 | 13 332465 | |
| 58 | 0.00057 20801 12504 598943 | | | 113953 |
| | | 48481 36011 014519 | 13 446417 | |
| 59 | 0.00057 69282 48515 613462 | | | 113953 |
| | | 48481 35997 454149 | 13 560370 | |
| 2 0 | 0.00058 17763 84513 067611 | | 13 674323 | |

| $\Delta\alpha$ | cos $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 1′ 20″ | 0.99999 99247 85823 217749 | | | |
| | | 18 92106 610363 | 23504 428771 | |
| 21 | 0.99999 99228 93716 607386 | | | 44 |
| | | 19 15611 039090 | 23504 428727 | |
| 22 | 0.99999 99209 78105 568296 | | | 46 |
| | | 19 39115 467771 | 23504 428681 | |
| 23 | 0.99999 99190 38990 100525 | | | 44 |
| | | 19 62619 896408 | 23504 428637 | |
| 24 | 0.99999 99170 76370 204117 | | | 48 |
| | | 19 86124 324997 | 23504 428589 | |
| 1 25 | 0.99999 99150 90245 879120 | | | 45 |
| | | 20 09628 753541 | 23504 428544 | |
| 26 | 0.99999 99130 80617 125579 | | | 48 |
| | | 20 33133 182037 | 23504 428496 | |
| 27 | 0.99999 99110 47483 943542 | | | 48 |
| | | 20 56637 610485 | 23504 428448 | |
| 28 | 0.99999 99089 90846 333057 | | | 48 |
| | | 20 80142 038885 | 23504 428400 | |
| 29 | 0.99999 99069 10704 294172 | | | 49 |
| | | 21 03646 467236 | 23504 428351 | |
| 1 30 | 0.99999 99048 07057 826936 | | | 50 |
| | | 21 27150 895537 | 23504 428301 | |
| 31 | 0.99999 99026 79906 931399 | | | 48 |
| | | 21 50655 323790 | 23504 428253 | |
| 32 | 0.99999 99005 29251 607609 | | | 53 |
| | | 21 74159 751990 | 23504 428200 | |
| 33 | 0.99999 98983 55091 855619 | | | 50 |
| | | 21 97664 180140 | 23504 428150 | |
| 34 | 0.99999 98961 57427 675479 | | | 51 |
| | | 22 21168 608239 | 23504 428099 | |
| 1 35 | 0.99999 98939 36259 067240 | | | 54 |
| | | 22 44673 036284 | 23504 428045 | |
| 36 | 0.99999 98916 91586 030956 | | | 51 |
| | | 22 68177 464278 | 23504 427994 | |
| 37 | 0.99999 98894 23408 566678 | | | 54 |
| | | 22 91681 892218 | 23504 427940 | |
| 38 | 0.99999 98871 31726 674460 | | | 54 |
| | | 23 15186 320104 | 23504 427886 | |
| 39 | 0.99999 98848 16540 354356 | | | 54 |
| | | 23 38690 747936 | 23504 427832 | |
| 1 40 | 0.99999 98824 77849 606420 | | | 55 |
| | | 23 62195 175713 | 23504 427777 | |
| 41 | 0.99999 98801 15654 430707 | | | 57 |
| | | 23 85699 603433 | 23504 427720 | |
| 42 | 0.99999 98777 29954 827274 | | | 54 |
| | | 24 09204 031099 | 23504 427666 | |
| 43 | 0.99999 98753 20750 796175 | | | 57 |
| | | 24 32708 458708 | 23504 427609 | |
| 44 | 0.99999 98728 88042 337467 | | | 58 |
| | | 24 56212 886259 | 23504 427551 | |
| 1 45 | 0.99999 98704 31829 451208 | | | 58 |
| | | 24 79717 313752 | 23504 427493 | |
| 46 | 0.99999 98679 52112 137456 | | | 57 |
| | | 25 03221 741188 | 23504 427436 | |
| 47 | 0.99999 98654 48890 396268 | | | 59 |
| | | 25 26726 168565 | 23504 427377 | |
| 48 | 0.99999 98629 22164 227703 | | | 61 |
| | | 25 50230 595881 | 23504 427316 | |
| 49 | 0.99999 98603 71933 631822 | | | 58 |
| | | 25 73735 023139 | 23504 427258 | |
| 1 50 | 0.99999 98577 98198 608683 | | | 62 |
| | | 25 97239 450335 | 23504 427196 | |
| 51 | 0.99999 98552 00959 158348 | | | 60 |
| | | 26 20743 877471 | 23504 427136 | |
| 52 | 0.99999 98525 80215 280877 | | | 62 |
| | | 26 44248 304545 | 23504 427074 | |
| 53 | 0.99999 98499 35966 976332 | | | 62 |
| | | 26 67752 731557 | 23504 427012 | |
| 54 | 0.99999 98472 68214 244775 | | | 63 |
| | | 26 91257 158506 | 23504 426949 | |
| 1 55 | 0.99999 98445 76957 086269 | | | 63 |
| | | 27 14761 585392 | 23504 426886 | |
| 56 | 0.99999 98418 62195 500877 | | | 64 |
| | | 27 38266 012214 | 23504 426822 | |
| 57 | 0.99999 98391 23929 488663 | | | 64 |
| | | 27 61770 438972 | 23504 426758 | |
| 58 | 0.99999 98363 62159 049691 | | | 66 |
| | | 27 85274 865664 | 23504 426692 | |
| 59 | 0.99999 98335 76884 184027 | | | 63 |
| | | 28 08779 292293 | 23504 426629 | |
| 2 0 | 0.99999 98307 68104 891734 | | | 69 |
| | | | 23504 426560 | |

| $\Delta\alpha$ | sin $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 2′ 0″ | 0.00058 17763 84513 067611 | | | |
| | | 48481 35983 779826 | 13 674323 | |
| 1 | 0.00058 66245 20496 847437 | | | 113952 |
| | | 48481 35969 991551 | 13 788275 | |
| 2 | 0.00059 14726 56466 838988 | | | 113953 |
| | | 48481 35956 089323 | 14 016181 | |
| 3 | 0.00059 63207 92422 928311 | | | 113953 |
| | | 48481 35942 073142 | 14 130133 | |
| 4 | 0.00060 11689 28365 001453 | | | 113952 |
| | | 48481 35927 943009 | | 113953 |
| 2 5 | 0.00060 60170 64292 944462 | | 14 244086 | |
| | | 48481 35913 698923 | | 113953 |
| 6 | 0.00061 08652 00206 643385 | | 14 358039 | |
| | | 48481 35899 340884 | | 113952 |
| 7 | 0.00061 57133 36105 984269 | | 14 471991 | |
| | | 48481 35884 868893 | | 113953 |
| 8 | 0.00062 05614 71990 853162 | | 14 585944 | |
| | | 48481 35870 282949 | | 113952 |
| 9 | 0.00062 54096 07861 136111 | | 14 699896 | |
| | | 48481 35855 583053 | | 113954 |
| 2 10 | 0.00063 02577 43716 719164 | | 14 813850 | |
| | | 48481 35840 769203 | | 113952 |
| 11 | 0.00063 51058 79557 488367 | | 14 927802 | |
| | | 48481 35825 841401 | | 113953 |
| 12 | 0.00063 99540 15383 329768 | | 15 041755 | |
| | | 48481 35810 799646 | | 113952 |
| 13 | 0.00064 48021 51194 129414 | | 15 155707 | |
| | | 48481 35795 643939 | | 113954 |
| 14 | 0.00064 96502 86989 773353 | | 15 269661 | |
| | | 48481 35780 374278 | | 113951 |
| 2 15 | 0.00065 44984 22770 147631 | | 15 383612 | |
| | | 48481 35764 990666 | | 113953 |
| 16 | 0.00065 93465 58535 138297 | | 15 497565 | |
| | | 48481 35749 493101 | | 113953 |
| 17 | 0.00066 41946 94284 631398 | | 15 611518 | |
| | | 48481 35733 881583 | | 113953 |
| 18 | 0.00066 90428 30018 512981 | | 15 725471 | |
| | | 48481 35718 156112 | | 113953 |
| 19 | 0.00067 38909 65736 669093 | | 15 839424 | |
| | | 48481 35702 316688 | | 113951 |
| 2 20 | 0.00067 87391 01438 985781 | | 15 953375 | |
| | | 48481 35686 363313 | | 113955 |
| 21 | 0.00068 35872 37125 349094 | | 16 067330 | |
| | | 48481 35670 295983 | | 113950 |
| 22 | 0.00068 84353 72795 645077 | | 16 181280 | |
| | | 48481 35654 114703 | | 113955 |
| 23 | 0.00069 32835 08449 759780 | | 16 295235 | |
| | | 48481 35637 819468 | | 113952 |
| 24 | 0.00069 81316 44087 579248 | | 16 409187 | |
| | | 48481 35621 410281 | | 113952 |
| 2 25 | 0.00070 29797 79708 989529 | | 16 523139 | |
| | | 48481 35604 887142 | | 113952 |
| 26 | 0.00070 78279 15313 876671 | | 16 637091 | |
| | | 48481 35588 250051 | | 113955 |
| 27 | 0.00071 26760 50902 126722 | | 16 751046 | |
| | | 48481 35571 499005 | | 113951 |
| 28 | 0.00071 75241 86473 625727 | | 16 864997 | |
| | | 48481 35554 634008 | | 113953 |
| 29 | 0.00072 23723 22028 259735 | | 16 978950 | |
| | | 48481 35537 655058 | | 113953 |
| 2 30 | 0.00072 72204 57565 914793 | | 17 092903 | |
| | | 48481 35520 562155 | | 113953 |
| 31 | 0.00073 20685 93086 476948 | | 17 206856 | |
| | | 48481 35503 355299 | | 113951 |
| 32 | 0.00073 69167 28589 832247 | | 17 320807 | |
| | | 48481 35486 034492 | | 113954 |
| 33 | 0.00074 17648 64075 866739 | | 17 434761 | |
| | | 48481 35468 599731 | | 113953 |
| 34 | 0.00074 66129 99544 466470 | | 17 548714 | |
| | | 48481 35451 051017 | | 113951 |
| 2 35 | 0.00075 14611 34995 517487 | | 17 662665 | |
| | | 48481 35433 388352 | | 113954 |
| 36 | 0.00075 63092 70428 905839 | | 17 776619 | |
| | | 48481 35415 611733 | | 113953 |
| 37 | 0.00076 11574 05844 517572 | | 17 890572 | |
| | | 48481 35397 721161 | | 113952 |
| 38 | 0.00076 60055 41242 238733 | | 18 004524 | |
| | | 48481 35379 716637 | | 113952 |
| 39 | 0.00077 08536 76621 955370 | | 18 118476 | |
| | | 48481 35361 598161 | | 113954 |
| 2 40 | 0.00077 57018 11983 553531 | | 18 232430 | |

| $\Delta\alpha$ | cos $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 2′ 0″ | 0.99999 98307 68104 891734 | | | |
| | | 28 32283 718853 | 23504 426560 | |
| 1 | 0.99999 98279 35821 172881 | | | 65 |
| | | 28 55788 145348 | 23504 426495 | |
| 2 | 0.99999 98250 80033 027533 | | | 67 |
| | | 28 79292 571776 | 23504 426428 | |
| 3 | 0.99999 98222 00740 455757 | | | 68 |
| | | 29 02796 998136 | 23504 426360 | |
| 4 | 0.99999 98192 97943 457621 | | | 69 |
| | | 29 26301 424427 | 23504 426291 | |
| | | | | 67 |
| 2 5 | 0.99999 98163 71642 033194 | | 23504 426224 | |
| | | 29 49805 850651 | | 71 |
| 6 | 0.99999 98134 21836 182543 | | 23504 426153 | |
| | | 29 73310 276804 | | 69 |
| 7 | 0.99999 98104 48525 905739 | | 23504 426084 | |
| | | 29 96814 702888 | | 71 |
| 8 | 0.99999 98074 51711 202851 | | 23504 426013 | |
| | | 30 20319 128901 | | 70 |
| 9 | 0.99999 98044 31392 073950 | | 23504 425943 | |
| | | 30 43823 554844 | | 73 |
| 2 10 | 0.99999 98013 87568 519106 | | 23504 425870 | |
| | | 30 67327 980714 | | 71 |
| 11 | 0.99999 97983 20240 538392 | | 23504 425799 | |
| | | 30 90832 406513 | | 73 |
| 12 | 0.99999 97952 29408 131879 | | 23504 425726 | |
| | | 31 14336 832239 | | 73 |
| 13 | 0.99999 97921 15071 299640 | | 23504 425653 | |
| | | 31 37841 257892 | | 74 |
| 14 | 0.99999 97889 77230 041748 | | 23504 425579 | |
| | | 31 61345 683471 | | 74 |
| 2 15 | 0.99999 97858 15884 358277 | | 23504 425505 | |
| | | 31 84850 108976 | | 75 |
| 16 | 0.99999 97826 31034 249301 | | 23504 425430 | |
| | | 32 08354 534406 | | 76 |
| 17 | 0.99999 97794 22679 714895 | | 23504 425354 | |
| | | 32 31858 959760 | | 75 |
| 18 | 0.99999 97761 90820 755135 | | 23504 425279 | |
| | | 32 55363 385039 | | 78 |
| 19 | 0.99999 97729 35457 370096 | | 23504 425201 | |
| | | 32 78867 810240 | | 75 |
| 2 20 | 0.99999 97696 56589 559856 | | 23504 425126 | |
| | | 33 02372 235366 | | 79 |
| 21 | 0.99999 97663 54217 324490 | | 23504 425047 | |
| | | 33 25876 660413 | | 78 |
| 22 | 0.99999 97630 28340 664077 | | 23504 424969 | |
| | | 33 49381 085382 | | 78 |
| 23 | 0.99999 97596 78959 578695 | | 23504 424891 | |
| | | 33 72885 510273 | | 80 |
| 24 | 0.99999 97563 06074 068422 | | 23504 424811 | |
| | | 33 96389 935084 | | 80 |
| 2 25 | 0.99999 97529 09684 133338 | | 23504 424731 | |
| | | 34 19894 359815 | | 80 |
| 26 | 0.99999 97494 89789 773523 | | 23504 424651 | |
| | | 34 43398 784466 | | 81 |
| 27 | 0.99999 97460 46390 989057 | | 23504 424570 | |
| | | 34 66903 209036 | | 81 |
| 28 | 0.99999 97425 79487 780021 | | 23504 424489 | |
| | | 34 90407 633525 | | 83 |
| 29 | 0.99999 97390 89080 146496 | | 23504 424406 | |
| | | 35 13912 057931 | | 82 |
| 2 30 | 0.99999 97355 75168 088565 | | 23504 424324 | |
| | | 35 37416 482255 | | 83 |
| 31 | 0.99999 97320 37751 606310 | | 23504 424241 | |
| | | 35 60920 906496 | | 84 |
| 32 | 0.99999 97284 76830 699814 | | 23504 424157 | |
| | | 35 84425 330653 | | 84 |
| 33 | 0.99999 97248 92405 369161 | | 23504 424073 | |
| | | 36 07929 754726 | | 86 |
| 34 | 0.99999 97212 84475 614435 | | 23504 423987 | |
| | | 36 31434 178713 | | 83 |
| 2 35 | 0.99999 97176 53041 435722 | | 23504 423904 | |
| | | 36 54938 602617 | | 88 |
| 36 | 0.99999 97139 98102 833105 | | 23504 423816 | |
| | | 36 78443 026433 | | 86 |
| 37 | 0.99999 97103 19659 806672 | | 23504 423730 | |
| | | 37 01947 450163 | | 86 |
| 38 | 0.99999 97066 17712 356509 | | 23504 423644 | |
| | | 37 25451 873807 | | 89 |
| 39 | 0.99999 97028 92260 482702 | | 23504 423555 | |
| | | 37 48956 297362 | | 87 |
| 2 40 | 0.99999 96991 43304 185340 | | 23504 423468 | |

| $\Delta\alpha$ | sin $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 2' 40" | 0.00077 57018 11983 553531 | | 18 232430 | |
| | | 48481 35343 365731 | | 113951 |
| 41 | 0.00078 05499 47326 919262 | | 18 346381 | |
| | | 48481 35325 019350 | | 113955 |
| 42 | 0.00078 53980 82651 938612 | | 18 460336 | |
| | | 48481 35306 559014 | | 113950 |
| 43 | 0.00079 02462 17958 497626 | | 18 574286 | |
| | | 48481 35287 984728 | | 113955 |
| 44 | 0.00079 50943 53246 482354 | | 18 688241 | |
| | | 48481 35269 296487 | | 113952 |
| 2 45 | 0.00079 99424 88515 778841 | | 18 802193 | |
| | | 48481 35250 494294 | | 113951 |
| 46 | 0.00080 47906 23766 273135 | | 18 916144 | |
| | | 48481 35231 578150 | | 113955 |
| 47 | 0.00080 96387 58997 851285 | | 19 030099 | |
| | | 48481 35212 548051 | | 113951 |
| 48 | 0.00081 44868 94210 399336 | | 19 144050 | |
| | | 48481 35193 404001 | | 113954 |
| 49 | 0.00081 93350 29403 803337 | | 19 258004 | |
| | | 48481 35174 145997 | | 113951 |
| 2 50 | 0.00082 41831 64577 949334 | | 19 371955 | |
| | | 48481 35154 774042 | | 113954 |
| 51 | 0.00082 90312 99732 723376 | | 19 485909 | |
| | | 48481 35135 288133 | | 113953 |
| 52 | 0.00083 38794 34868 011509 | | 19 599862 | |
| | | 48481 35115 688271 | | 113951 |
| 53 | 0.00083 87275 69983 699780 | | 19 713813 | |
| | | 48481 35095 974458 | | 113954 |
| 54 | 0.00084 35757 05079 674238 | | 19 827767 | |
| | | 48481 35076 146691 | | 113952 |
| 2 55 | 0.00084 84238 40155 820929 | | 19 941719 | |
| | | 48481 35056 204972 | | 113953 |
| 56 | 0.00085 32719 75212 025901 | | 20 055672 | |
| | | 48481 35036 149300 | | 113953 |
| 57 | 0.00085 81201 10248 175201 | | 20 169625 | |
| | | 48481 35015 979675 | | 113951 |
| 58 | 0.00086 29682 45264 154876 | | 20 283576 | |
| | | 48481 34995 696099 | | 113955 |
| 59 | 0.00086 78163 80259 850975 | | 20 397531 | |
| | | 48481 34975 298568 | | 113951 |
| 3 0 | 0.00087 26645 15235 149543 | | 20 511482 | |
| | | 48481 34954 787086 | | 113953 |
| 1 | 0.00087 75126 50189 936629 | | 20 625435 | |
| | | 48481 34934 161651 | | 113953 |
| 2 | 0.00088 23607 85124 098280 | | 20 739388 | |
| | | 48481 34913 422263 | | 113952 |
| 3 | 0.00088 72089 20037 520543 | | 20 853340 | |
| | | 48481 34892 568923 | | 113953 |
| 4 | 0.00089 20570 54930 089466 | | 20 967293 | |
| | | 48481 34871 601630 | | 113954 |
| 3 5 | 0.00089 69051 89801 691096 | | 21 081247 | |
| | | 48481 34850 520383 | | 113950 |
| 6 | 0.00090 17533 24652 211479 | | 21 195197 | |
| | | 48481 34829 325186 | | 113955 |
| 7 | 0.00090 66014 59481 536665 | | 21 309152 | |
| | | 48481 34808 016034 | | 113951 |
| 8 | 0.00091 14495 94289 552699 | | 21 423103 | |
| | | 48481 34786 592931 | | 113953 |
| 9 | 0.00091 62977 29076 145630 | | 21 537056 | |
| | | 48481 34765 055875 | | 113954 |
| 3 10 | 0.00092 11458 63841 201505 | | 21 651010 | |
| | | 48481 34743 404865 | | 113951 |
| 11 | 0.00092 59939 98584 606370 | | 21 764961 | |
| | | 48481 34721 639904 | | 113954 |
| 12 | 0.00093 08421 33306 246274 | | 21 878915 | |
| | | 48481 34699 760989 | | 113951 |
| 13 | 0.00093 56902 68006 007263 | | 21 992866 | |
| | | 48481 34677 768123 | | 113954 |
| 14 | 0.00094 05384 02683 775386 | | 22 106820 | |
| | | 48481 34655 661303 | | 113952 |
| 3 15 | 0.00094 53865 37339 436689 | | 22 220772 | |
| | | 48481 34633 440531 | | 113953 |
| 16 | 0.00095 02346 71972 877220 | | 22 334725 | |
| | | 48481 34611 105806 | | 113952 |
| 17 | 0.00095 50828 06583 983026 | | 22 448677 | |
| | | 48481 34588 657129 | | 113954 |
| 18 | 0.00095 99309 41172 640155 | | 22 562631 | |
| | | 48481 34566 094498 | | 113951 |
| 19 | 0.00096 47790 75738 734653 | | 22 676582 | |
| | | 48481 34543 417916 | | 113954 |
| 3 20 | 0.00096 96272 10282 152569 | | 22 790536 | |

| $\Delta\alpha$ | cos $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 2' 40" | 0.99999 96991 43304 185340 | | 23504 423468 | |
| | | 37 72460 720830 | | 89 |
| 41 | 0.99999 96953 70843 464510 | | 23504 423379 | |
| | | 37 95965 144209 | | 90 |
| 42 | 0.99999 96915 74878 320301 | | 23504 423289 | |
| | | 38 19469 567498 | | 89 |
| 43 | 0.99999 96877 55408 752803 | | 23504 423200 | |
| | | 38 42973 990698 | | 89 |
| 44 | 0.99999 96839 12434 762105 | | 23504 423111 | |
| | | 38 66478 413809 | | 94 |
| 2 45 | 0.99999 96800 45956 348296 | | 23504 423017 | |
| | | 38 89982 836826 | | 89 |
| 46 | 0.99999 96761 55973 511470 | | 23504 422928 | |
| | | 39 13487 259754 | | 92 |
| 47 | 0.99999 96722 42486 251716 | | 23504 422836 | |
| | | 39 36991 682590 | | 94 |
| 48 | 0.99999 96683 05494 569126 | | 23504 422742 | |
| | | 39 60496 105332 | | 93 |
| 49 | 0.99999 96643 44998 463794 | | 23504 422649 | |
| | | 39 84000 527981 | | 92 |
| 2 50 | 0.99999 96603 60997 935813 | | 23504 422557 | |
| | | 40 07504 950538 | | 95 |
| 51 | 0.99999 96563 53492 985275 | | 23504 422462 | |
| | | 40 31009 373000 | | 95 |
| 52 | 0.99999 96523 22483 612275 | | 23504 422367 | |
| | | 40 54513 795367 | | 96 |
| 53 | 0.99999 96482 67969 816908 | | 23504 422271 | |
| | | 40 78018 217638 | | 95 |
| 54 | 0.99999 96441 89951 599270 | | 23504 422176 | |
| | | 41 01522 639814 | | 96 |
| 2 55 | 0.99999 96400 88428 959456 | | 23504 422080 | |
| | | 41 25027 061894 | | 97 |
| 56 | 0.99999 96359 63401 897562 | | 23504 421983 | |
| | | 41 48531 483877 | | 98 |
| 57 | 0.99999 96318 14870 413685 | | 23504 421885 | |
| | | 41 72035 905762 | | 99 |
| 58 | 0.99999 96276 42834 507923 | | 23504 421786 | |
| | | 41 95540 327548 | | 97 |
| 59 | 0.99999 96234 47294 180375 | | 23504 421689 | |
| | | 42 19044 749237 | | 99 |
| 3 0 | 0.99999 96192 28249 431138 | | 23504 421590 | |
| | | 42 42549 170827 | | 102 |
| 1 | 0.99999 96149 85700 260311 | | 23504 421488 | |
| | | 42 66053 592315 | | 98 |
| 2 | 0.99999 96107 19646 667996 | | 23504 421390 | |
| | | 42 89558 013705 | | 101 |
| 3 | 0.99999 96064 30088 654291 | | 23504 421289 | |
| | | 43 13062 434994 | | 103 |
| 4 | 0.99999 96021 17026 219297 | | 23504 421186 | |
| | | 43 36566 856180 | | 100 |
| 3 5 | 0.99999 95977 80459 363117 | | 23504 421086 | |
| | | 43 60071 277266 | | 104 |
| 6 | 0.99999 95934 20388 085851 | | 23504 420982 | |
| | | 43 83575 698248 | | 102 |
| 7 | 0.99999 95890 36812 387603 | | 23504 420880 | |
| | | 44 07080 119128 | | 104 |
| 8 | 0.99999 95846 29732 268475 | | 23504 420776 | |
| | | 44 30584 539904 | | 105 |
| 9 | 0.99999 95801 99147 728571 | | 23504 420671 | |
| | | 44 54088 960575 | | 103 |
| 3 10 | 0.99999 95757 45058 767996 | | 23504 420568 | |
| | | 44 77593 381143 | | 106 |
| 11 | 0.99999 95712 67465 386853 | | 23504 420462 | |
| | | 45 01097 801605 | | 106 |
| 12 | 0.99999 95667 66367 585248 | | 23504 420356 | |
| | | 45 24602 221961 | | 106 |
| 13 | 0.99999 95622 41765 363287 | | 23504 420250 | |
| | | 45 48106 642211 | | 108 |
| 14 | 0.99999 95576 93658 721076 | | 23504 420142 | |
| | | 45 71611 062353 | | 106 |
| 3 15 | 0.99999 95531 22047 658723 | | 23504 420036 | |
| | | 45 95115 482389 | | 108 |
| 16 | 0.99999 95485 26932 176334 | | 23504 419928 | |
| | | 46 18619 902317 | | 110 |
| 17 | 0.99999 95439 08312 274017 | | 23504 419818 | |
| | | 46 42124 322135 | | 108 |
| 18 | 0.99999 95392 66187 951882 | | 23504 419710 | |
| | | 46 65628 741845 | | 109 |
| 19 | 0.99999 95346 00559 210037 | | 23504 419601 | |
| | | 46 89133 161446 | | 112 |
| 3 20 | 0.99999 95299 11426 048591 | | 23504 419489 | |

| $\Delta\alpha$ | sin $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 3' 20" | 0.00096 96272 10282 152569 | | | |
| | | 48481 34520 627380 | 22 790536 | |
| 21 | 0.00097 44753 44802 779949 | | | 113952 |
| | | 48481 34497 722892 | 22 904488 | |
| 22 | 0.00097 93234 79300 502841 | | | 113952 |
| | | 48481 34474 704452 | 23 018440 | |
| 23 | 0.00098 41716 13775 207293 | | | 113954 |
| | | 48481 34451 572058 | 23 132394 | |
| 24 | 0.00098 90197 48226 779351 | | | 113952 |
| | | 48481 34428 325712 | 23 246346 | |
| 3 25 | 0.00099 38678 82655 105063 | | | 113952 |
| | | 48481 34404 965414 | 23 360298 | |
| 26 | 0.00099 87160 17060 070477 | | | 113954 |
| | | 48481 34381 491162 | 23 474252 | |
| 27 | 0.00100 35641 51441 561639 | | | 113951 |
| | | 48481 34357 902959 | 23 588203 | |
| 28 | 0.00100 84122 85799 464598 | | | 113954 |
| | | 48481 34334 200802 | 23 702157 | |
| 29 | 0.00101 32604 20133 665400 | | | 113952 |
| | | 48481 34310 384693 | 23 816109 | |
| 3 30 | 0.00101 81085 54444 050093 | | | 113953 |
| | | 48481 34286 454631 | 23 930062 | |
| 31 | 0.00102 29566 88730 504724 | | | 113953 |
| | | 48481 34262 410616 | 24 044015 | |
| 32 | 0.00102 78048 22992 915340 | | | 113951 |
| | | 48481 34238 252650 | 24 157966 | |
| 33 | 0.00103 26529 57231 167990 | | | 113955 |
| | | 48481 34213 980729 | 24 271921 | |
| 34 | 0.00103 75010 91445 148719 | | | 113950 |
| | | 48481 34189 594858 | 24 385871 | |
| 3 35 | 0.00104 23492 25634 743577 | | | 113955 |
| | | 48481 34165 095032 | 24 499826 | |
| 36 | 0.00104 71973 59799 838609 | | | 113951 |
| | | 48481 34140 481255 | 24 613777 | |
| 37 | 0.00105 20454 93940 319864 | | | 113953 |
| | | 48481 34115 753525 | 24 727730 | |
| 38 | 0.00105 68936 28056 073389 | | | 113954 |
| | | 48481 34090 911841 | 24 841684 | |
| 39 | 0.00106 17417 62146 985230 | | | 113950 |
| | | 48481 34065 956207 | 24 955634 | |
| 3 40 | 0.00106 65898 96212 941437 | | | 113955 |
| | | 48481 34040 886618 | 25 069589 | |
| 41 | 0.00107 14380 30253 828055 | | | 113952 |
| | | 48481 34015 703077 | 25 183541 | |
| 42 | 0.00107 62861 64269 531132 | | | 113952 |
| | | 48481 33990 405584 | 25 297493 | |
| 43 | 0.00108 11342 98259 936716 | | | 113953 |
| | | 48481 33964 994138 | 25 411446 | |
| 44 | 0.00108 59824 32224 930854 | | | 113953 |
| | | 48481 33939 468739 | 25 525399 | |
| 3 45 | 0.00109 08305 66164 399593 | | | 113952 |
| | | 48481 33913 829388 | 25 639351 | |
| 46 | 0.00109 56787 00078 228981 | | | 113952 |
| | | 48481 33888 076085 | 25 753303 | |
| 47 | 0.00110 05268 33966 305066 | | | 113955 |
| | | 48481 33862 208827 | 25 867258 | |
| 48 | 0.00110 53749 67828 513893 | | | 113950 |
| | | 48481 33836 227619 | 25 981208 | |
| 49 | 0.00111 02231 01664 741512 | | | 113955 |
| | | 48481 33810 132456 | 26 095163 | |
| 3 50 | 0.00111 50712 35474 873968 | | | 113950 |
| | | 48481 33783 923343 | 26 209113 | |
| 51 | 0.00111 99193 69258 797311 | | | 113955 |
| | | 48481 33757 600275 | 26 323068 | |
| 52 | 0.00112 47675 03016 397586 | | | 113952 |
| | | 48481 33731 163255 | 26 437020 | |
| 53 | 0.00112 96156 36747 560841 | | | 113951 |
| | | 48481 33704 612284 | 26 550971 | |
| 54 | 0.00113 44637 70452 173125 | | | 113955 |
| | | 48481 33677 947358 | 26 664926 | |
| 3 55 | 0.00113 93119 04130 120483 | | | 113951 |
| | | 48481 33651 168481 | 26 778877 | |
| 56 | 0.00114 41600 37781 288964 | | | 113953 |
| | | 48481 33624 275651 | 26 892830 | |
| 57 | 0.00114 90081 71405 564615 | | | 113953 |
| | | 48481 33597 268868 | 27 006783 | |
| 58 | 0.00115 38563 05002 833483 | | | 113952 |
| | | 48481 33570 148133 | 27 120735 | |
| 59 | 0.00115 87044 38572 981616 | | | 113954 |
| | | 48481 33542 913444 | 27 234689 | |
| 4 0 | 0.00116 35525 72115 895060 | | | 113950 |
| | | | 27 348639 | |

| $\Delta\alpha$ | cos $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 3′ 20″ | 0.99999 95299 11426 048591 | | | |
| | | 47 12637 580935 | 23504 419489 | 110 |
| 21 | 0.99999 95251 98788 467656 | | 23504 419379 | |
| | | 47 36142 000314 | | 111 |
| 22 | 0.99999 95204 62646 467342 | | 23504 419268 | |
| | | 47 59646 419582 | | 112 |
| 23 | 0.99999 95157 03000 047760 | | 23504 419156 | |
| | | 47 83150 838738 | | 113 |
| 24 | 0.99999 95109 19849 209022 | | 23504 419043 | |
| | | 48 06655 257781 | | 112 |
| 3 25 | 0.99999 95061 13193 951241 | | 23504 418931 | |
| | | 48 30159 676712 | | 114 |
| 26 | 0.99999 95012 83034 274529 | | 23504 418817 | |
| | | 48 53664 095529 | | 114 |
| 27 | 0.99999 94964 29370 179000 | | 23504 418703 | |
| | | 48 77168 514232 | | 114 |
| 28 | 0.99999 94915 52201 664768 | | 23504 418589 | |
| | | 49 00672 932821 | | 117 |
| 29 | 0.99999 94866 51528 731947 | | 23504 418472 | |
| | | 49 24177 351293 | | 115 |
| 3 30 | 0.99999 94817 27351 380654 | | 23504 418357 | |
| | | 49 47681 769650 | | 115 |
| 31 | 0.99999 94767 79669 611004 | | 23504 418242 | |
| | | 49 71186 187892 | | 118 |
| 32 | 0.99999 94718 08483 423112 | | 23504 418124 | |
| | | 49 94690 606016 | | 117 |
| 33 | 0.99999 94668 13792 817096 | | 23504 418007 | |
| | | 50 18195 024023 | | 119 |
| 34 | 0.99999 94617 95597 793073 | | 23504 417888 | |
| | | 50 41699 441911 | | 117 |
| 3 35 | 0.99999 94567 53898 351162 | | 23504 417771 | |
| | | 50 65203 859682 | | 120 |
| 36 | 0.99999 94516 88694 491480 | | 23504 417651 | |
| | | 50 88708 277333 | | 119 |
| 37 | 0.99999 94465 99986 214147 | | 23504 417532 | |
| | | 51 12212 694865 | | 120 |
| 38 | 0.99999 94414 87773 519282 | | 23504 417412 | |
| | | 51 35717 112277 | | 122 |
| 39 | 0.99999 94363 52056 407005 | | 23504 417290 | |
| | | 51 59221 529567 | | 120 |
| 3 40 | 0.99999 94311 92834 877438 | | 23504 417170 | |
| | | 51 82725 946737 | | 122 |
| 41 | 0.99999 94260 10108 930701 | | 23504 417048 | |
| | | 52 06230 363785 | | 123 |
| 42 | 0.99999 94208 03878 566916 | | 23504 416925 | |
| | | 52 29734 780710 | | 123 |
| 43 | 0.99999 94155 74143 786206 | | 23504 416802 | |
| | | 52 53239 197512 | | 123 |
| 44 | 0.99999 94103 20904 588694 | | 23504 416679 | |
| | | 52 76743 614191 | | 123 |
| 3 45 | 0.99999 94050 44160 974503 | | 23504 416556 | |
| | | 53 00248 030747 | | 126 |
| 46 | 0.99999 93997 43912 943756 | | 23504 416430 | |
| | | 53 23752 447177 | | 125 |
| 47 | 0.99999 93944 20160 496579 | | 23504 416305 | |
| | | 53 47256 863482 | | 126 |
| 48 | 0.99999 93890 72903 633097 | | 23504 416179 | |
| | | 53 70761 279661 | | 125 |
| 49 | 0.99999 93837 02142 353436 | | 23504 416054 | |
| | | 53 94265 695715 | | 128 |
| 3 50 | 0.99999 93783 07876 657721 | | 23504 415926 | |
| | | 54 17770 111641 | | 126 |
| 51 | 0.99999 93728 90106 546080 | | 23504 415800 | |
| | | 54 41274 527441 | | 129 |
| 52 | 0.99999 93674 48832 018639 | | 23504 415671 | |
| | | 54 64778 943112 | | 128 |
| 53 | 0.99999 93619 84053 075527 | | 23504 415543 | |
| | | 54 88283 358655 | | 130 |
| 54 | 0.99999 93564 95769 716872 | | 23504 415413 | |
| | | 55 11787 774068 | | 128 |
| 3 55 | 0.99999 93509 83981 942804 | | 23504 415285 | |
| | | 55 35292 189353 | | 131 |
| 56 | 0.99999 93454 48689 753451 | | 23504 415154 | |
| | | 55 58796 604507 | | 130 |
| 57 | 0.99999 93398 89893 148944 | | 23504 415024 | |
| | | 55 82301 019531 | | 132 |
| 58 | 0.99999 93343 07592 129413 | | 23504 414892 | |
| | | 56 05805 434423 | | 132 |
| 59 | 0.99999 93287 01786 694990 | | 23504 414760 | |
| | | 56 29309 849183 | | 131 |
| 4 0 | 0.99999 93230 72476 845807 | | 23504 414629 | |

| $\Delta a$ | sin $\Delta a$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 4' 0" | 0.00116 35525 72115 895060 | | | |
| | | 48481 33515 564805 | 27 348639 | |
| 1 | 0.00116 84007 05631 459865 | | | 113956 |
| | | 48481 33488 102210 | 27 462595 | |
| 2 | 0.00117 32488 39119 562075 | | | 113950 |
| | | 48481 33460 525665 | 27 576545 | |
| 3 | 0.00117 80969 72580 087740 | | | 113953 |
| | | 48481 33432 835167 | 27 690498 | |
| 4 | 0.00118 29451 06012 922907 | | | 113954 |
| | | 48481 33405 030715 | 27 804452 | |
| 4 5 | 0.00118 77932 39417 953622 | | | 113951 |
| | | 48481 33377 112312 | 27 918403 | |
| 6 | 0.00119 26413 72795 065934 | | | 113953 |
| | | 48481 33349 079956 | 28 032356 | |
| 7 | 0.00119 74895 06144 145890 | | | 113954 |
| | | 48481 33320 933646 | 28 146310 | |
| 8 | 0.00120 23376 39465 079536 | | | 113951 |
| | | 48481 33292 673385 | 28 260261 | |
| 9 | 0.00120 71857 72757 752921 | | | 113953 |
| | | 48481 33264 299171 | 28 374214 | |
| 4 10 | 0.00121 20339 06022 052092 | | | 113953 |
| | | 48481 33235 811004 | 28 488167 | |
| 11 | 0.00121 68820 39257 863096 | | | 113952 |
| | | 48481 33207 208885 | 28 602119 | |
| 12 | 0.00122 17301 72465 071981 | | | 113953 |
| | | 48481 33178 492813 | 28 716072 | |
| 13 | 0.00122 65783 05643 564794 | | | 113953 |
| | | 48481 33149 662788 | 28 830025 | |
| 14 | 0.00123 14264 38793 227582 | | | 113952 |
| | | 48481 33120 718811 | 28 943977 | |
| 4 15 | 0.00123 62745 71913 946393 | | | 113953 |
| | | 48481 33091 660881 | 29 057930 | |
| 16 | 0.00124 11227 05005 607274 | | | 113952 |
| | | 48481 33062 488999 | 29 171882 | |
| 17 | 0.00124 59708 38068 096273 | | | 113953 |
| | | 48481 33033 203164 | 29 285835 | |
| 18 | 0.00125 08189 71101 299437 | | | 113953 |
| | | 48481 33003 803376 | 29 399788 | |
| 19 | 0.00125 56671 04105 102813 | | | 113952 |
| | | 48481 32974 289636 | 29 513740 | |
| 4 20 | 0.00126 05152 37079 392449 | | | 113953 |
| | | 48481 32944 661943 | 29 627693 | |
| 21 | 0.00126 53633 70024 054392 | | | 113952 |
| | | 48481 32914 920298 | 29 741645 | |
| 22 | 0.00127 02115 02938 974690 | | | 113954 |
| | | 48481 32885 064699 | 29 855599 | |
| 23 | 0.00127 50596 35824 039389 | | | 113951 |
| | | 48481 32855 095149 | 29 969550 | |
| 24 | 0.00127 99077 68679 134538 | | | 113953 |
| | | 48481 32825 011646 | 30 083503 | |
| 4 25 | 0.00128 47559 01504 146184 | | | 113953 |
| | | 48481 32794 814190 | 30 197456 | |
| 26 | 0.00128 96040 34298 960374 | | | 113953 |
| | | 48481 32764 502781 | 30 311409 | |
| 27 | 0.00129 44521 67063 463155 | | | 113951 |
| | | 48481 32734 077421 | 30 425360 | |
| 28 | 0.00129 93002 99797 540576 | | | 113955 |
| | | 48481 32703 538106 | 30 539315 | |
| 29 | 0.00130 41484 32501 078682 | | | 113950 |
| | | 48481 32672 884841 | 30 653265 | |
| 4 30 | 0.00130 89965 65173 963523 | | | 113954 |
| | | 48481 32642 117622 | 30 767219 | |
| 31 | 0.00131 38446 97816 081145 | | | 113953 |
| | | 48481 32611 236450 | 30 881172 | |
| 32 | 0.00131 86928 30427 317595 | | | 113952 |
| | | 48481 32580 241326 | 30 995124 | |
| 33 | 0.00132 35409 63007 558921 | | | 113953 |
| | | 48481 32549 132249 | 31 109077 | |
| 34 | 0.00132 83890 95556 691170 | | | 113951 |
| | | 48481 32517 909221 | 31 223028 | |
| 4 35 | 0.00133 32372 28074 600391 | | | 113955 |
| | | 48481 32486 572238 | 31 336983 | |
| 36 | 0.00133 80853 60561 172629 | | | 113951 |
| | | 48481 32455 121304 | 31 450934 | |
| 37 | 0.00134 29334 93016 293933 | | | 113953 |
| | | 48481 32423 556417 | 31 564887 | |
| 38 | 0.00134 77816 25439 850350 | | | 113952 |
| | | 48481 32391 877578 | 31 678839 | |
| 39 | 0.00135 26297 57831 727928 | | | 113954 |
| | | 48481 32360 084785 | 31 792793 | |
| 4 40 | 0.00135 74778 90191 812713 | | | 113951 |
| | | | 31 906744 | |

| $\Delta a$ | cos $\Delta a$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 4′ 0″ | 0.99999 93230 72476 845807 | | | |
| | | 56 52814 263812 | 23504 414629 | |
| 1 | 0.99999 93174 19662 581995 | | | 134 |
| | | 56 76318 678307 | 23504 414495 | |
| 2 | 0.99999 93117 43343 903688 | | | 132 |
| | | 56 99823 092670 | 23504 414363 | |
| 3 | 0.99999 93060 43520 811018 | | | 136 |
| | | 57 23327 506897 | 23504 414227 | |
| 4 | 0.99999 93003 20193 304121 | | | 134 |
| | | 57 46831 920990 | 23504 414093 | |
| 4 5 | 0.99999 92945 73361 383131 | | | 134 |
| | | 57 70336 334949 | 23504 413959 | |
| 6 | 0.99999 92888 03025 048182 | | | 136 |
| | | 57 93840 748772 | 23504 413823 | |
| 7 | 0.99999 92830 09184 299410 | | | 137 |
| | | 58 17345 162458 | 23504 413686 | |
| 8 | 0.99999 92771 91839 136952 | | | 135 |
| | | 58 40849 576009 | 23504 413551 | |
| 9 | 0.99999 92713 50989 560943 | | | 139 |
| | | 58 64353 989421 | 23504 413412 | |
| 4 10 | 0.99999 92654 86635 571522 | | | 138 |
| | | 58 87858 402695 | 23504 413274 | |
| 11 | 0.99999 92595 98777 168827 | | | 137 |
| | | 59 11362 815832 | 23504 413137 | |
| 12 | 0.99999 92536 87414 352995 | | | 140 |
| | | 59 34867 228829 | 23504 412997 | |
| 13 | 0.99999 92477 52547 124166 | | | 138 |
| | | 59 58371 641688 | 23504 412859 | |
| 14 | 0.99999 92417 94175 482478 | | | 142 |
| | | 59 81876 054405 | 23504 412717 | |
| 4 15 | 0.99999 92358 12299 428073 | | | 140 |
| | | 60 05380 466982 | 23504 412577 | |
| 16 | 0.99999 92298 06918 961091 | | | 141 |
| | | 60 28884 879418 | 23504 412436 | |
| 17 | 0.99999 92237 78034 081673 | | | 141 |
| | | 60 52389 291713 | 23504 412295 | |
| 18 | 0.99999 92177 25644 789960 | | | 143 |
| | | 60 75893 703865 | 23504 412152 | |
| 19 | 0.99999 92116 49751 086095 | | | 143 |
| | | 60 99398 115874 | 23504 412009 | |
| 4 20 | 0.99999 92055 50352 970221 | | | 142 |
| | | 61 22902 527741 | 23504 411867 | |
| 21 | 0.99999 91994 27450 442480 | | | 146 |
| | | 61 46406 939462 | 23504 411721 | |
| 22 | 0.99999 91932 81043 503018 | | | 143 |
| | | 61 69911 351040 | 23504 411578 | |
| 23 | 0.99999 91871 11132 151978 | | | 146 |
| | | 61 93415 762472 | 23504 411432 | |
| 24 | 0.99999 91809 17716 389506 | | | 144 |
| | | 62 16920 173760 | 23504 411288 | |
| 4 25 | 0.99999 91747 00796 215746 | | | 148 |
| | | 62 40424 584900 | 23504 411140 | |
| 26 | 0.99999 91684 60371 630846 | | | 146 |
| | | 62 63928 995894 | 23504 410994 | |
| 27 | 0.99999 91621 96442 634952 | | | 146 |
| | | 62 87433 406742 | 23504 410848 | |
| 28 | 0.99999 91559 09009 228210 | | | 150 |
| | | 63 10937 817440 | 23504 410698 | |
| 29 | 0.99999 91495 98071 410770 | | | 146 |
| | | 63 34442 227992 | 23504 410552 | |
| 4 30 | 0.99999 91432 63629 182778 | | | 151 |
| | | 63 57946 638393 | 23504 410401 | |
| 31 | 0.99999 91369 05682 544385 | | | 148 |
| | | 63 81451 048646 | 23504 410253 | |
| 32 | 0.99999 91305 24231 495739 | | | 150 |
| | | 64 04955 458749 | 23504 410103 | |
| 33 | 0.99999 91241 19276 036990 | | | 152 |
| | | 64 28459 868700 | 23504 409951 | |
| 34 | 0.99999 91176 90816 168290 | | | 150 |
| | | 64 51964 278501 | 23504 409801 | |
| 4 35 | 0.99999 91112 38851 889789 | | | 151 |
| | | 64 75468 688151 | 23504 409650 | |
| 36 | 0.99999 91047 63383 201638 | | | 154 |
| | | 64 98973 097647 | 23504 409496 | |
| 37 | 0.99999 90982 64410 103991 | | | 151 |
| | | 65 22477 506992 | 23504 409345 | |
| 38 | 0.99999 90917 41932 596999 | | | 154 |
| | | 65 45981 916183 | 23504 409191 | |
| 39 | 0.99999 90851 95950 680816 | | | 154 |
| | | 65 69486 325220 | 23504 409037 | |
| | | | | 155 |
| 4 40 | 0.99999 90786 26464 355596 | | 23504 408882 | |

| $\Delta a$ | sin $\Delta a$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 4' 40" | 0.00135 74778 90191 812713 | | | |
| | | 48481 32328 178041 | 31 906744 | |
| 41 | 0.00136 23260 22519 990754 | | | 113954 |
| | | 48481 32296 157343 | 32 020698 | |
| 42 | 0.00136 71741 54816 148097 | | | 113952 |
| | | 48481 32264 022693 | 32 134650 | |
| 43 | 0.00137 20222 87080 170790 | | | 113952 |
| | | 48481 32231 774091 | 32 248602 | |
| 44 | 0.00137 68704 19311 944881 | | | 113954 |
| | | 48481 32199 411535 | 32 362556 | |
| 4 45 | 0.00138 17185 51511 356416 | | | 113951 |
| | | 48481 32166 935028 | 32 476507 | |
| 46 | 0.00138 65666 83678 291444 | | | 113953 |
| | | 48481 32134 344568 | 32 590460 | |
| 47 | 0.00139 14148 15812 636012 | | | 113954 |
| | | 48481 32101 640154 | 32 704414 | |
| 48 | 0.00139 62629 47914 276166 | | | 113951 |
| | | 48481 32068 821789 | 32 818365 | |
| 49 | 0.00140 11110 79983 097955 | | | 113953 |
| | | 48481 32035 889471 | 32 932318 | |
| 4 50 | 0.00140 59592 12018 987426 | | | 113952 |
| | | 48481 32002 843201 | 33 046270 | |
| 51 | 0.00141 08073 44021 830627 | | | 113954 |
| | | 48481 31969 682977 | 33 160224 | |
| 52 | 0.00141 56554 75991 513604 | | | 113951 |
| | | 48481 31936 408802 | 33 274175 | |
| 53 | 0.00142 05036 07927 922406 | | | 113954 |
| | | 48481 31903 020673 | 33 388129 | |
| 54 | 0.00142 53517 39830 943079 | | | 113952 |
| | | 48481 31869 518592 | 33 502081 | |
| 4 55 | 0.00143 01998 71700 461671 | | | 113953 |
| | | 48481 31835 902558 | 33 616034 | |
| 56 | 0.00143 50480 03536 364229 | | | 113951 |
| | | 48481 31802 172573 | 33 729985 | |
| 57 | 0.00143 98961 35338 536802 | | | 113955 |
| | | 48481 31768 328633 | 33 843940 | |
| 58 | 0.00144 47442 67106 865435 | | | 113950 |
| | | 48481 31734 370743 | 33 957890 | |
| 59 | 0.00144 95923 98841 236178 | | | 113955 |
| | | 48481 31700 298898 | 34 071845 | |
| 5 0 | 0.00145 44405 30541 535076 | | | 113951 |
| | | 48481 31666 113102 | 34 185796 | |
| 1 | 0.00145 92886 62207 648178 | | | 113952 |
| | | 48481 31631 813354 | 34 299748 | |
| 2 | 0.00146 41367 93839 461532 | | | 113955 |
| | | 48481 31597 399651 | 34 413703 | |
| 3 | 0.00146 89849 25436 861183 | | | 113950 |
| | | 48481 31562 871998 | 34 527653 | |
| 4 | 0.00147 38330 56999 733181 | | | 113955 |
| | | 48481 31528 230390 | 34 641608 | |
| 5 5 | 0.00147 86811 88527 963571 | | | 113950 |
| | | 48481 31493 474832 | 34 755558 | |
| 6 | 0.00148 35293 20021 438403 | | | 113955 |
| | | 48481 31458 605319 | 34 869513 | |
| 7 | 0.00148 83774 51480 043722 | | | 113950 |
| | | 48481 31423 621856 | 34 983463 | |
| 8 | 0.00149 32255 82903 665578 | | | 113955 |
| | | 48481 31388 524438 | 35 097418 | |
| 9 | 0.00149 80737 14292 190016 | | | 113952 |
| | | 48481 31353 313068 | 35 211370 | |
| 5 10 | 0.00150 29218 45645 503084 | | | 113951 |
| | | 48481 31317 987747 | 35 325321 | |
| 11 | 0.00150 77699 76963 490831 | | | 113954 |
| | | 48481 31282 548472 | 35 439275 | |
| 12 | 0.00151 26181 08246 039303 | | | 113953 |
| | | 48481 31246 995244 | 35 553228 | |
| 13 | 0.00151 74662 39493 034547 | | | 113951 |
| | | 48481 31211 328065 | 35 667179 | |
| 14 | 0.00152 23143 70704 362612 | | | 113954 |
| | | 48481 31175 546932 | 35 781133 | |
| 5 15 | 0.00152 71625 01879 909544 | | | 113951 |
| | | 48481 31139 651848 | 35 895084 | |
| 16 | 0.00153 20106 33019 561392 | | | 113954 |
| | | 48481 31103 642810 | 36 009038 | |
| 17 | 0.00153 68587 64123 204202 | | | 113953 |
| | | 48481 31067 519819 | 36 122991 | |
| 18 | 0.00154 17068 95190 724021 | | | 113950 |
| | | 48481 31031 282878 | 36 236941 | |
| 19 | 0.00154 65550 26222 006899 | | | 113955 |
| | | 48481 30994 931982 | 36 350896 | |
| 5 20 | 0.00155 14031 57216 938881 | | | 113952 |
| | | | 36 464848 | |

| $\Delta\alpha$ | cos $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 4′ 40″ | 0.99999 90786 26464 355596 | | | |
| | | 65 92990 734102 | 23504 408882 | 153 |
| 41 | 0.99999 90720 33473 621494 | 66 16495 142831 | 23504 408729 | 158 |
| 42 | 0.99999 90654 16978 478663 | 66 39999 551402 | 23504 408571 | 154 |
| 43 | 0.99999 90587 76978 927261 | 66 63503 959819 | 23504 408417 | 158 |
| 44 | 0.99999 90521 13474 967442 | 66 87008 368078 | 23504 408259 | 157 |
| 4 45 | 0.99999 90454 26466 599364 | 67 10512 776180 | 23504 408102 | 157 |
| 46 | 0.99999 90387 15953 823184 | 67 34017 184125 | 23504 407945 | 158 |
| 47 | 0.99999 90319 81936 639059 | 67 57521 591912 | 23504 407787 | 160 |
| 48 | 0.99999 90252 24415 047147 | 67 81025 999539 | 23504 407627 | 159 |
| 49 | 0.99999 90184 43389 047608 | 68 04530 407007 | 23504 407468 | 160 |
| 4 50 | 0.99999 90116 38858 640601 | 68 28034 814315 | 23504 407308 | 160 |
| 51 | 0.99999 90048 10823 826286 | 68 51539 221463 | 23504 407148 | 161 |
| 52 | 0.99999 89979 59284 604823 | 68 75043 628450 | 23504 406987 | 163 |
| 53 | 0.99999 89910 84240 976373 | 68 98548 035274 | 23504 406824 | 160 |
| 54 | 0.99999 89841 85692 941099 | 69 22052 441938 | 23504 406664 | 164 |
| 4 55 | 0.99999 89772 63640 499161 | 69 45556 848438 | 23504 406500 | 163 |
| 56 | 0.99999 89703 18083 650723 | 69 69061 254775 | 23504 406337 | 164 |
| 57 | 0.99999 89633 49022 395948 | 69 92565 660948 | 23504 406173 | 165 |
| 58 | 0.99999 89563 56456 735000 | 70 16070 066956 | 23504 406008 | 163 |
| 59 | 0.99999 89493 40386 668044 | 70 39574 472801 | 23504 405845 | 167 |
| 5 0 | 0.99999 89423 00812 195243 | 70 63078 878479 | 23504 405678 | 165 |
| 1 | 0.99999 89352 37733 316764 | 70 86583 283992 | 23504 405513 | 168 |
| 2 | 0.99999 89281 51150 032772 | 71 10087 689337 | 23504 405345 | 166 |
| 3 | 0.99999 89210 41062 343435 | 71 33592 094516 | 23504 405179 | 168 |
| 4 | 0.99999 89139 07470 248919 | 71 57096 499527 | 23504 405011 | 168 |
| 5 5 | 0.99999 89067 50373 749392 | 71 80600 904370 | 23504 404843 | 169 |
| 6 | 0.99999 88995 69772 845022 | 72 04105 309044 | 23504 404674 | 169 |
| 7 | 0.99999 88923 65667 535978 | 72 27609 713549 | 23504 404505 | 170 |
| 8 | 0.99999 88851 38057 822429 | 72 51114 117884 | 23504 404335 | 171 |
| 9 | 0.99999 88778 86943 704545 | 72 74618 522048 | 23504 404164 | 171 |
| 5 10 | 0.99999 88706 12325 182497 | 72 98122 926041 | 23504 403993 | 170 |
| 11 | 0.99999 88633 14202 256456 | 73 21627 329864 | 23504 403823 | 174 |
| 12 | 0.99999 88559 92574 926592 | 73 45131 733513 | 23504 403649 | 172 |
| 13 | 0.99999 88486 47443 193079 | 73 68636 136990 | 23504 403477 | 172 |
| 14 | 0.99999 88412 78807 056089 | 73 92140 540295 | 23504 403305 | 176 |
| 5 15 | 0.99999 88338 86666 515794 | 74 15644 943424 | 23504 403129 | 172 |
| 16 | 0.99999 88264 71021 572370 | 74 39149 346381 | 23504 402957 | 177 |
| 17 | 0.99999 88190 31872 225989 | 74 62653 749161 | 23504 402780 | 173 |
| 18 | 0.99999 88115 69218 476828 | 74 86158 151768 | 23504 402607 | 179 |
| 19 | 0.99999 88040 83060 325060 | 75 09662 554196 | 23504 402428 | 173 |
| 5 20 | 0.99999 87965 73397 770864 | | 23504 402255 | |

| $\Delta\alpha$ | sin $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 5' 20" | 0.00155 14031 57216 938881 | | | |
| | | 48481 30958 467134 | 36 464848 | |
| 21 | 0.00155 62512 88175 406015 | | | 113952 |
| | | 48481 30921 888334 | 36 578800 | |
| 22 | 0.00156 10994 19097 294349 | | | 113953 |
| | | 48481 30885 195581 | 36 692753 | |
| 23 | 0.00156 59475 49982 489930 | | | 113952 |
| | | 48481 30848 388876 | 36 806705 | |
| 24 | 0.00157 07956 80830 878806 | | | 113954 |
| | | 48481 30811 468217 | 36 920659 | |
| 5 25 | 0.00157 56438 11642 347023 | | | 113951 |
| | | 48481 30774 433607 | 37 034610 | |
| 26 | 0.00158 04919 42416 780630 | | | 113952 |
| | | 48481 30737 285045 | 37 148562 | |
| 27 | 0.00158 53400 73154 065675 | | | 113955 |
| | | 48481 30700 022528 | 37 262517 | |
| 28 | 0.00159 01882 03854 088203 | | | 113951 |
| | | 48481 30662 646060 | 37 376468 | |
| 29 | 0.00159 50363 34516 734263 | | | 113952 |
| | | 48481 30625 155640 | 37 490420 | |
| 5 30 | 0.00159 98844 65141 889903 | | | 113954 |
| | | 48481 30587 551266 | 37 604374 | |
| 31 | 0.00160 47325 95729 441169 | | | 113951 |
| | | 48481 30549 832941 | 37 718325 | |
| 32 | 0.00160 95807 26279 274110 | | | 113954 |
| | | 48481 30512 000662 | 37 832279 | |
| 33 | 0.00161 44288 56791 274772 | | | 113952 |
| | | 48481 30474 054431 | 37 946231 | |
| 34 | 0.00161 92769 87265 329203 | | | 113953 |
| | | 48481 30435 994247 | 38 060184 | |
| 5 35 | 0.00162 41251 17701 323450 | | | 113951 |
| | | 48481 30397 820112 | 38 174135 | |
| 36 | 0.00162 89732 48099 143562 | | | 113954 |
| | | 48481 30359 532023 | 38 288089 | |
| 37 | 0.00163 38213 78458 675585 | | | 113952 |
| | | 48481 30321 129982 | 38 402041 | |
| 38 | 0.00163 86695 08779 805567 | | | 113952 |
| | | 48481 30282 613989 | 38 515993 | |
| 39 | 0.00164 35176 39062 419556 | | | 113954 |
| | | 48481 30243 984042 | 38 629947 | |
| 5 40 | 0.00164 83657 69306 403598 | | | 113952 |
| | | 48481 30205 240143 | 38 743899 | |
| 41 | 0.00165 32138 99511 643741 | | | 113952 |
| | | 48481 30166 382292 | 38 857851 | |
| 42 | 0.00165 80620 29678 026033 | | | 113954 |
| | | 48481 30127 410489 | 38 971803 | |
| 43 | 0.00166 29101 59805 436522 | | | 113952 |
| | | 48481 30088 324732 | 39 085757 | |
| 44 | 0.00166 77582 89893 761254 | | | 113953 |
| | | 48481 30049 125023 | 39 199709 | |
| 5 45 | 0.00167 26064 19942 886277 | | | 113951 |
| | | 48481 30009 811361 | 39 313662 | |
| 46 | 0.00167 74545 49952 697638 | | | 113953 |
| | | 48481 29970 383748 | 39 427613 | |
| 47 | 0.00168 23026 79923 081386 | | | 113954 |
| | | 48481 29930 842182 | 39 541566 | |
| 48 | 0.00168 71508 09853 923568 | | | 113952 |
| | | 48481 29891 186662 | 39 655520 | |
| 49 | 0.00169 19989 39745 110230 | | | 113951 |
| | | 48481 29851 417190 | 39 769472 | |
| 5 50 | 0.00169 68470 69596 527420 | | | 113954 |
| | | 48481 29811 533767 | 39 883423 | |
| 51 | 0.00170 16951 99408 061187 | | | 113952 |
| | | 48481 29771 536390 | 39 997377 | |
| 52 | 0.00170 65433 29179 597577 | | | 113953 |
| | | 48481 29731 425061 | 40 111329 | |
| 53 | 0.00171 13914 58911 022638 | | | 113952 |
| | | 48481 29691 199779 | 40 225282 | |
| 54 | 0.00171 62395 88602 222417 | | | 113953 |
| | | 48481 29650 860545 | 40 339234 | |
| 5 55 | 0.00172 10877 18253 082962 | | | 113952 |
| | | 48481 29610 407358 | 40 453187 | |
| 56 | 0.00172 59358 47863 490320 | | | 113952 |
| | | 48481 29569 840219 | 40 567139 | |
| 57 | 0.00173 07839 77433 330539 | | | 113954 |
| | | 48481 29529 159128 | 40 681091 | |
| 58 | 0.00173 56321 06962 489667 | | | 113952 |
| | | 48481 29488 364083 | 40 795045 | |
| 59 | 0.00174 04802 36450 853750 | | | 113952 |
| | | 48481 29447 455086 | 40 908997 | |
| 6 0 | 0.00174 53283 65898 308836 | | 41 022949 | |

| $\Delta\alpha$ | cos $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 5′ 20″ | 0.99999 87965 73397 770864 | | | |
| | | 75 33166 956451 | 23504 402255 | 180 |
| 21 | 0.99999 87890 40230 814413 | | 23504 402075 | |
| | | 75 56671 358526 | | 176 |
| 22 | 0.99999 87814 83559 455887 | | 23504 401899 | |
| | | 75 80175 760425 | | 179 |
| 23 | 0.99999 87739 03383 695462 | | 23504 401720 | |
| | | 76 03680 162145 | | 178 |
| 24 | 0.99999 87662 99703 533317 | | 23504 401542 | |
| | | 76 27184 563687 | | 180 |
| 5 25 | 0.99999 87586 72518 969630 | | | |
| | | 76 50688 965049 | 23504 401362 | 180 |
| 26 | 0.99999 87510 21830 004581 | | 23504 401182 | |
| | | 76 74193 366231 | | 179 |
| 27 | 0.99999 87433 47636 638350 | | 23504 401003 | |
| | | 76 97697 767234 | | 182 |
| 28 | 0.99999 87356 49938 871116 | | 23504 400821 | |
| | | 77 21202 168055 | | 181 |
| 29 | 0.99999 87279 28736 703061 | | 23504 400640 | |
| | | 77 44706 568695 | | 183 |
| 5 30 | 0.99999 87201 84030 134366 | | | |
| | | 77 68210 969152 | 23504 400457 | 181 |
| 31 | 0.99999 87124 15819 165214 | | 23504 400276 | |
| | | 77 91715 369428 | | 184 |
| 32 | 0.99999 87046 24103 795786 | | 23504 400092 | |
| | | 78 15219 769520 | | 185 |
| 33 | 0.99999 86968 08884 026266 | | 23504 399907 | |
| | | 78 38724 169427 | | 182 |
| 34 | 0.99999 86889 70159 856839 | | 23504 399725 | |
| | | 78 62228 569152 | | 186 |
| 5 35 | 0.99999 86811 07931 287687 | | | |
| | | 78 85732 968691 | 23504 399539 | 184 |
| 36 | 0.99999 86732 22198 318996 | | 23504 399355 | |
| | | 79 09237 368046 | | 188 |
| 37 | 0.99999 86653 12960 950950 | | 23504 399167 | |
| | | 79 32741 767213 | | 186 |
| 38 | 0.99999 86573 80219 183737 | | 23504 398981 | |
| | | 79 56246 166194 | | 186 |
| 39 | 0.99999 86494 23973 017543 | | 23504 398795 | |
| | | 79 79750 564989 | | 188 |
| 5 40 | 0.99999 86414 44222 452554 | | | |
| | | 80 03254 963596 | 23504 398607 | 188 |
| 41 | 0.99999 86334 40967 488958 | | 23504 398419 | |
| | | 80 26759 362015 | | 189 |
| 42 | 0.99999 86254 14208 126943 | | 23504 398230 | |
| | | 80 50263 760245 | | 189 |
| 43 | 0.99999 86173 63944 366698 | | 23504 398041 | |
| | | 80 73768 158286 | | 189 |
| 44 | 0.99999 86092 90176 208412 | | 23504 397852 | |
| | | 80 97272 556138 | | 192 |
| 5 45 | 0.99999 86011 92903 652274 | | | |
| | | 81 20776 953798 | 23504 397660 | 190 |
| 46 | 0.99999 85930 72126 698476 | | 23504 397470 | |
| | | 81 44281 351268 | | 191 |
| 47 | 0.99999 85849 27845 347208 | | 23504 397279 | |
| | | 81 67785 748547 | | 193 |
| 48 | 0.99999 85767 60059 598661 | | 23504 397086 | |
| | | 81 91290 145633 | | 191 |
| 49 | 0.99999 85685 68769 453028 | | 23504 396895 | |
| | | 82 14794 542528 | | 195 |
| 5 50 | 0.99999 85603 53974 910500 | | | |
| | | 82 38298 939228 | 23504 396700 | 192 |
| 51 | 0.99999 85521 15675 971272 | | 23504 396508 | |
| | | 82 61803 335736 | | 195 |
| 52 | 0.99999 85438 53872 635536 | | 23504 396313 | |
| | | 82 85307 732049 | | 194 |
| 53 | 0.99999 85355 68564 903487 | | 23504 396119 | |
| | | 83 08812 128168 | | 197 |
| 54 | 0.99999 85272 59752 775319 | | 23504 395922 | |
| | | 83 32316 524090 | | 194 |
| 5 55 | 0.99999 85189 27436 251229 | | | |
| | | 83 55820 919818 | 23504 395728 | 197 |
| 56 | 0.99999 85105 71615 331411 | | 23504 395531 | |
| | | 83 79325 315349 | | 197 |
| 57 | 0.99999 85021 92290 016062 | | 23504 395334 | |
| | | 84 02829 710683 | | 198 |
| 58 | 0.99999 84937 89460 305379 | | 23504 395136 | |
| | | 84 26334 105819 | | 198 |
| 59 | 0.99999 84853 63126 199560 | | 23504 394938 | |
| | | 84 49838 500757 | | 198 |
| 6 0 | 0.99999 84769 13287 698803 | | 23504 394740 | |

| $\Delta\alpha$ | sin $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 6′ 0″ | 0.00174 53283 65898 308836 | | | |
| | | 48481 29406 432137 | 41 022949 | |
| 1 | 0.00175 01764 95304 740973 | | | 113954 |
| | | 48481 29365 295234 | 41 136903 | |
| 2 | 0.00175 50246 24670 036207 | | | 113950 |
| | | 48481 29324 044381 | 41 250853 | |
| 3 | 0.00175 98727 53994 080588 | | | 113954 |
| | | 48481 29282 679574 | 41 364807 | |
| 4 | 0.00176 47208 83276 760162 | | | 113953 |
| | | 48481 29241 200814 | 41 478760 | |
| 6 5 | 0.00176 95690 12517 960976 | | | 113952 |
| | | 48481 29199 608102 | 41 592712 | |
| 6 | 0.00177 44171 41717 569078 | | | 113952 |
| | | 48481 29157 901438 | 41 706664 | |
| 7 | 0.00177 92652 70875 470516 | | | 113953 |
| | | 48481 29116 080821 | 41 820617 | |
| 8 | 0.00178 41133 99991 551337 | | | 113953 |
| | | 48481 29074 146251 | 41 934570 | |
| 9 | 0.00178 89615 29065 697588 | | | 113952 |
| | | 48481 29032 097729 | 42 048522 | |
| 6 10 | 0.00179 38096 58097 795317 | | | 113952 |
| | | 48481 28989 935255 | 42 162474 | |
| 11 | 0.00179 86577 87087 730572 | | | 113953 |
| | | 48481 28947 658828 | 42 276427 | |
| 12 | 0.00180 35059 16035 389400 | | | 113953 |
| | | 48481 28905 268448 | 42 390380 | |
| 13 | 0.00180 83540 44940 657848 | | | 113951 |
| | | 48481 28862 764117 | 42 504331 | |
| 14 | 0.00181 32021 73803 421965 | | | 113955 |
| | | 48481 28820 145831 | 42 618286 | |
| 6 15 | 0.00181 80503 02623 567796 | | | 113950 |
| | | 48481 28777 413595 | 42 732236 | |
| 16 | 0.00182 28984 31400 981391 | | | 113954 |
| | | 48481 28734 567405 | 42 846190 | |
| 17 | 0.00182 77465 60135 548796 | | | 113952 |
| | | 48481 28691 607263 | 42 960142 | |
| 18 | 0.00183 25946 88827 156059 | | | 113952 |
| | | 48481 28648 533169 | 43 074094 | |
| 19 | 0.00183 74428 17475 689228 | | | 113954 |
| | | 48481 28605 345121 | 43 188048 | |
| 6 20 | 0.00184 22909 46081 034349 | | | 113951 |
| | | 48481 28562 043122 | 43 301999 | |
| 21 | 0.00184 71390 74643 077471 | | | 113953 |
| | | 48481 28518 627170 | 43 415952 | |
| 22 | 0.00185 19872 03161 704641 | | | 113953 |
| | | 48481 28475 097265 | 43 529905 | |
| 23 | 0.00185 68353 31636 801906 | | | 113952 |
| | | 48481 28431 453408 | 43 643857 | |
| 24 | 0.00186 16834 60068 255314 | | | 113953 |
| | | 48481 28387 695598 | 43 757810 | |
| 6 25 | 0.00186 65315 88455 950912 | | | 113951 |
| | | 48481 28343 823837 | 43 871761 | |
| 26 | 0.00187 13797 16799 774749 | | | 113954 |
| | | 48481 28299 838122 | 43 985715 | |
| 27 | 0.00187 62278 45099 612871 | | | 113952 |
| | | 48481 28255 738455 | 44 099667 | |
| 28 | 0.00188 10759 73355 351326 | | | 113953 |
| | | 48481 28211 524835 | 44 213620 | |
| 29 | 0.00188 59241 01566 876161 | | | 113952 |
| | | 48481 28167 197263 | 44 327572 | |
| 6 30 | 0.00189 07722 29734 073424 | | | 113952 |
| | | 48481 28122 755739 | 44 441524 | |
| 31 | 0.00189 56203 57856 829163 | | | 113954 |
| | | 48481 28078 200261 | 44 555478 | |
| 32 | 0.00190 04684 85935 029424 | | | 113951 |
| | | 48481 28033 530832 | 44 669429 | |
| 33 | 0.00190 53166 13968 560256 | | | 113952 |
| | | 48481 27988 747451 | 44 783381 | |
| 34 | 0.00191 01647 41957 307707 | | | 113955 |
| | | 48481 27943 850115 | 44 897336 | |
| 6 35 | 0.00191 50128 69901 157822 | | | 113950 |
| | | 48481 27898 838829 | 45 011286 | |
| 36 | 0.00191 98609 97799 996651 | | | 113954 |
| | | 48481 27853 713589 | 45 125240 | |
| 37 | 0.00192 47091 25653 710240 | | | 113952 |
| | | 48481 27808 474397 | 45 239192 | |
| 38 | 0.00192 95572 53462 184637 | | | 113952 |
| | | 48481 27763 121253 | 45 353144 | |
| 39 | 0.00193 44053 81225 305890 | | | 113953 |
| | | 48481 27717 654156 | 45 467097 | |
| 6 40 | 0.00193 92535 08942 960046 | | | 113953 |
| | | | 45 581050 | |

| $\Delta\alpha$ | cos $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 6′ 0″ | 0.99999 84769 13287 698803 | | | |
| | | 84 73342 895497 | 23504 394740 | |
| 1 | 0.99999 84684 39944 803306 | | | 199 |
| | | 84 96847 290038 | 23504 394541 | |
| 2 | 0.99999 84599 43097 513268 | | | 200 |
| | | 85 20351 684379 | 23504 394341 | |
| 3 | 0.99999 84514 22745 828889 | | | 201 |
| | | 85 43856 078519 | 23504 394140 | |
| 4 | 0.99999 84428 78889 750370 | | | 200 |
| | | 85 67360 472459 | 23504 393940 | |
| 6 5 | 0.99999 84343 11529 277911 | | | 201 |
| | | 85 90864 866198 | 23504 393739 | |
| 6 | 0.99999 84257 20664 411713 | | | 203 |
| | | 86 14369 259734 | 23504 393536 | |
| 7 | 0.99999 84171 06295 151979 | | | 202 |
| | | 86 37873 653068 | 23504 393334 | |
| 8 | 0.99999 84084 68421 498911 | | | 203 |
| | | 86 61378 046199 | 23504 393131 | |
| 9 | 0.99999 83998 07043 452712 | | | 203 |
| | | 86 84882 439127 | 23504 392928 | |
| 6 10 | 0.99999 83911 22161 013585 | | | 205 |
| | | 87 08386 831850 | 23504 392723 | |
| 11 | 0.99999 83824 13774 181735 | | | 205 |
| | | 87 31891 224368 | 23504 392518 | |
| 12 | 0.99999 83736 81882 957367 | | | 204 |
| | | 87 55395 616682 | 23504 392314 | |
| 13 | 0.99999 83649 26487 340685 | | | 206 |
| | | 87 78900 008790 | 23504 392108 | |
| 14 | 0.99999 83561 47587 331895 | | | 208 |
| | | 88 02404 400690 | 23504 391900 | |
| 6 15 | 0.99999 83473 45182 931205 | | | 205 |
| | | 88 25908 792385 | 23504 391695 | |
| 16 | 0.99999 83385 19274 138820 | | | 208 |
| | | 88 49413 183872 | 23504 391487 | |
| 17 | 0.99999 83296 69860 954948 | | | 208 |
| | | 88 72917 575151 | 23504 391279 | |
| 18 | 0.99999 83207 96943 379797 | | | 209 |
| | | 88 96421 966221 | 23504 391070 | |
| 19 | 0.99999 83119 00521 413576 | | | 208 |
| | | 89 19926 357083 | 23504 390862 | |
| 6 20 | 0.99999 83029 80595 056493 | | | 211 |
| | | 89 43430 747734 | 23504 390651 | |
| 21 | 0.99999 82940 37164 308759 | | | 210 |
| | | 89 66935 138175 | 23504 390441 | |
| 22 | 0.99999 82850 70229 170584 | | | 210 |
| | | 89 90439 528406 | 23504 390231 | |
| 23 | 0.99999 82760 79789 642178 | | | 212 |
| | | 90 13943 918425 | 23504 390019 | |
| 24 | 0.99999 82670 65845 723753 | | | 211 |
| | | 90 37448 308233 | 23504 389808 | |
| 6 25 | 0.99999 82580 28397 415520 | | | 214 |
| | | 90 60952 697827 | 23504 389594 | |
| 26 | 0.99999 82489 67444 717693 | | | 211 |
| | | 90 84457 087210 | 23504 389383 | |
| 27 | 0.99999 82398 82987 630483 | | | 215 |
| | | 91 07961 476378 | 23504 389168 | |
| 28 | 0.99999 82307 75026 154105 | | | 213 |
| | | 91 31465 865333 | 23504 388955 | |
| 29 | 0.99999 82216 43560 288772 | | | 216 |
| | | 91 54970 254072 | 23504 388739 | |
| 6 30 | 0.99999 82124 88590 034700 | | | 214 |
| | | 91 78474 642597 | 23504 388525 | |
| 31 | 0.99999 82033 10115 392103 | | | 216 |
| | | 92 01979 030906 | 23504 388309 | |
| 32 | 0.99999 81941 08136 361197 | | | 216 |
| | | 92 25483 418999 | 23504 388093 | |
| 33 | 0.99999 81848 82652 942198 | | | 218 |
| | | 92 48987 806874 | 23504 387875 | |
| 34 | 0.99999 81756 33665 135324 | | | 217 |
| | | 92 72492 194532 | 23504 387658 | |
| 6 35 | 0.99999 81663 61172 940792 | | | 217 |
| | | 92 95996 581973 | 23504 387441 | |
| 36 | 0.99999 81570 65176 358819 | | | 219 |
| | | 93 19500 969195 | 23504 387222 | |
| 37 | 0.99999 81477 45675 389624 | | | 219 |
| | | 93 43005 356198 | 23504 387003 | |
| 38 | 0.99999 81384 02670 033426 | | | 220 |
| | | 93 66509 742981 | 23504 386783 | |
| 39 | 0.99999 81290 36160 290445 | | | 220 |
| | | 93 90014 129544 | 23504 386563 | |
| 6 40 | 0.99999 81196 46146 160901 | | | 220 |
| | | | 23504 386343 | |

| $\Delta\alpha$ | sin $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 6' 40" | 0.00193 92535 08942 960046 | | | |
| | | 48481 27672 073106 | 45 581050 | |
| 41 | 0.00194 41016 36615 033152 | | | 113951 |
| | | 48481 27626 378105 | 45 695001 | |
| 42 | 0.00194 89497 64241 411257 | | | 113954 |
| | | 48481 27580 569150 | 45 808955 | |
| 43 | 0.00195 37978 91821 980407 | | | 113951 |
| | | 48481 27534 646244 | 45 922906 | |
| 44 | 0.00195 86460 19356 626651 | | | 113954 |
| | | 48481 27488 609384 | 46 036860 | |
| 6 45 | 0.00196 34941 46845 236035 | | | 113952 |
| | | 48481 27442 458572 | 46 150812 | |
| 46 | 0.00196 83422 74287 694607 | | | 113952 |
| | | 48481 27396 193808 | 46 264764 | |
| 47 | 0.00197 31904 01683 888415 | | | 113953 |
| | | 48481 27349 815091 | 46 378717 | |
| 48 | 0.00197 80385 29033 703506 | | | 113952 |
| | | 48481 27303 322422 | 46 492669 | |
| 49 | 0.00198 28866 56337 025928 | | | 113952 |
| | | 48481 27256 715801 | 46 606621 | |
| 6 50 | 0.00198 77347 83593 741729 | | | 113954 |
| | | 48481 27209 995226 | 46 720575 | |
| 51 | 0.00199 25829 10803 736955 | | | 113951 |
| | | 48481 27163 160700 | 46 834526 | |
| 52 | 0.00199 74310 37966 897655 | | | 113954 |
| | | 48481 27116 212220 | 46 948480 | |
| 53 | 0.00200 22791 65083 109875 | | | 113951 |
| | | 48481 27069 149789 | 47 062431 | |
| 54 | 0.00200 71272 92152 259664 | | | 113953 |
| | | 48481 27021 973405 | 47 176384 | |
| 6 55 | 0.00201 19754 19174 233069 | | | 113952 |
| | | 48481 26974 683069 | 47 290336 | |
| 56 | 0.00201 68235 46148 916138 | | | 113954 |
| | | 48481 26927 278779 | 47 404290 | |
| 57 | 0.00202 16716 73076 194917 | | | 113951 |
| | | 48481 26879 760538 | 47 518241 | |
| 58 | 0.00202 65197 99955 955455 | | | 113952 |
| | | 48481 26832 128345 | 47 632193 | |
| 59 | 0.00203 13679 26788 083800 | | | 113954 |
| | | 48481 26784 382198 | 47 746147 | |
| 7 0 | 0.00203 62160 53572 465998 | | | 113952 |
| | | 48481 26736 522099 | 47 860099 | |
| 1 | 0.00204 10641 80308 988097 | | | 113953 |
| | | 48481 26688 548048 | 47 974051 | |
| 2 | 0.00204 59123 06997 536145 | | | 113952 |
| | | 48481 26640 460044 | 48 088004 | |
| 3 | 0.00205 07604 33637 996189 | | | 113953 |
| | | 48481 26592 258088 | 48 201956 | |
| 4 | 0.00205 56085 60230 254277 | | | 113952 |
| | | 48481 26543 942179 | 48 315909 | |
| 7 5 | 0.00206 04566 86774 196456 | | | 113952 |
| | | 48481 26495 512318 | 48 429861 | |
| 6 | 0.00206 53048 13269 708774 | | | 113953 |
| | | 48481 26446 968505 | 48 543813 | |
| 7 | 0.00207 01529 39716 677279 | | | 113953 |
| | | 48481 26398 310739 | 48 657766 | |
| 8 | 0.00207 50010 66114 988018 | | | 113951 |
| | | 48481 26349 539020 | 48 771719 | |
| 9 | 0.00207 98491 92464 527038 | | | 113954 |
| | | 48481 26300 653350 | 48 885670 | |
| 7 10 | 0.00208 46973 18765 180388 | | | 113951 |
| | | 48481 26251 653726 | 48 999624 | |
| 11 | 0.00208 95454 45016 834114 | | | 113954 |
| | | 48481 26202 540151 | 49 113575 | |
| 12 | 0.00209 43935 71219 374265 | | | 113952 |
| | | 48481 26153 312622 | 49 227529 | |
| 13 | 0.00209 92416 97372 686887 | | | 113951 |
| | | 48481 26103 971141 | 49 341481 | |
| 14 | 0.00210 40898 23476 658028 | | | 113954 |
| | | 48481 26054 515709 | 49 455432 | |
| 7 15 | 0.00210 89379 49531 173737 | | | 113953 |
| | | 48481 26004 946323 | 49 569386 | |
| 16 | 0.00211 37860 75536 120060 | | | 113950 |
| | | 48481 25955 262984 | 49 683339 | |
| 17 | 0.00211 86342 01491 383044 | | | 113955 |
| | | 48481 25905 465695 | 49 797289 | |
| 18 | 0.00212 34823 27396 848739 | | | 113950 |
| | | 48481 25855 554451 | 49 911244 | |
| 19 | 0.00212 83304 53252 403190 | | | 113955 |
| | | 48481 25805 529257 | 50 025194 | |
| 7 20 | 0.00213 31785 79057 932447 | | 50 139149 | |

| $\Delta\alpha$ | cos $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 6′ 40″ | 0.99999 81196 46146 160901 | | | |
| | | 94 13518 515887 | 23504 386343 | |
| 41 | 0.99999 81102 32627 645014 | | | 222 |
| | | 94 37022 902008 | 23504 386121 | |
| 42 | 0.99999 81007 95604 743006 | | | 222 |
| | | 94 60527 287907 | 23504 385899 | |
| 43 | 0.99999 80913 35077 455099 | | | 222 |
| | | 94 84031 673584 | 23504 385677 | |
| 44 | 0.99999 80818 51045 781515 | | | 223 |
| | | 95 07536 059038 | 23504 385454 | |
| 6 45 | 0.99999 80723 43509 722477 | | | 223 |
| | | 95 31040 444269 | 23504 385231 | |
| 46 | 0.99999 80628 12469 278208 | | | 225 |
| | | 95 54544 829275 | 23504 385006 | |
| 47 | 0.99999 80532 57924 448933 | | | 224 |
| | | 95 78049 214057 | 23504 384782 | |
| 48 | 0.99999 80436 79875 234876 | | | 225 |
| | | 96 01553 598614 | 23504 384557 | |
| 49 | 0.99999 80340 78321 636262 | | | 226 |
| | | 96 25057 982945 | 23504 384331 | |
| 6 50 | 0.99999 80244 53263 653317 | | | 225 |
| | | 96 48562 367051 | 23504 384106 | |
| 51 | 0.99999 80148 04701 286266 | | | 229 |
| | | 96 72066 750928 | 23504 383877 | |
| 52 | 0.99999 80051 32634 535338 | | | 226 |
| | | 96 95571 134579 | 23504 383651 | |
| 53 | 0.99999 79954 37063 400759 | | | 228 |
| | | 97 19075 518002 | 23504 383423 | |
| 54 | 0.99999 79857 17987 882757 | | | 228 |
| | | 97 42579 901197 | 23504 383195 | |
| 6 55 | 0.99999 79759 75407 981560 | | | 230 |
| | | 97 66084 284162 | 23504 382965 | |
| 56 | 0.99999 79662 09323 697398 | | | 229 |
| | | 97 89588 666898 | 23504 382736 | |
| 57 | 0.99999 79564 19735 030500 | | | 230 |
| | | 98 13093 049404 | 23504 382506 | |
| 58 | 0.99999 79466 06641 981096 | | | 231 |
| | | 98 36597 431679 | 23504 382275 | |
| 59 | 0.99999 79367 70044 549417 | | | 230 |
| | | 98 60101 813724 | 23504 382045 | |
| 7 0 | 0.99999 79269 09942 735693 | | | 234 |
| | | 98 83606 195535 | 23504 381811 | |
| 1 | 0.99999 79170 26336 540158 | | | 231 |
| | | 99 07110 577115 | 23504 381580 | |
| 2 | 0.99999 79071 19225 963043 | | | 232 |
| | | 99 30614 958463 | 23504 381348 | |
| 3 | 0.99999 78971 88611 004580 | | | 235 |
| | | 99 54119 339576 | 23504 381113 | |
| 4 | 0.99999 78872 34491 665004 | | | 233 |
| | | 99 77623 720456 | 23504 380880 | |
| 7 5 | 0.99999 78772 56867 944548 | | | 235 |
| | | 100 01128 101101 | 23504 380645 | |
| 6 | 0.99999 78672 55739 843447 | | | 235 |
| | | 100 24632 481511 | 23504 380410 | |
| 7 | 0.99999 78572 31107 361936 | | | 235 |
| | | 100 48136 861686 | 23504 380175 | |
| 8 | 0.99999 78471 82970 500250 | | | 237 |
| | | 100 71641 241624 | 23504 379938 | |
| 9 | 0.99999 78371 11329 258626 | | | 237 |
| | | 100 95145 621325 | 23504 379701 | |
| 7 10 | 0.99999 78270 16183 637301 | | | 236 |
| | | 101 18650 000790 | 23504 379465 | |
| 11 | 0.99999 78168 97533 636511 | | | 239 |
| | | 101 42154 380016 | 23504 379226 | |
| 12 | 0.99999 78067 55379 256495 | | | 237 |
| | | 101 65658 759005 | 23504 378989 | |
| 13 | 0.99999 77965 89720 497490 | | | 241 |
| | | 101 89163 137753 | 23504 378748 | |
| 14 | 0.99999 77864 00557 359737 | | | 238 |
| | | 102 12667 516263 | 23504 378510 | |
| 7 15 | 0.99999 77761 87889 843474 | | | 240 |
| | | 102 36171 894533 | 23504 378270 | |
| 16 | 0.99999 77659 51717 948941 | | | 241 |
| | | 102 59676 272562 | 23504 378029 | |
| 17 | 0.99999 77556 92041 676379 | | | 241 |
| | | 102 83180 650350 | 23504 377788 | |
| 18 | 0.99999 77454 08861 026029 | | | 242 |
| | | 103 06685 027896 | 23504 377546 | |
| 19 | 0.99999 77351 02175 998133 | | | 243 |
| | | 103 30189 405199 | 23504 377303 | |
| 7 20 | 0.99999 77247 71986 592934 | | | 241 |
| | | | 23504 377062 | |

| $\Delta a$ | sin $\Delta a$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 7′ 20″ | 0.00213 31785 79057 932447 | | | |
| | | 48481 25755 390108 | 50 139149 | 113950 |
| 21 | 0.00213 80267 04813 322555 | 48481 25705 137009 | 50 253099 | 113954 |
| 22 | 0.00214 28748 30518 459564 | 48481 25654 769956 | 50 367053 | 113953 |
| 23 | 0.00214 77229 56173 229520 | 48481 25604 288950 | 50 481006 | 113950 |
| 24 | 0.00215 25710 81777 518470 | 48481 25553 693994 | 50 594956 | 113955 |
| 7 25 | 0.00215 74192 07331 212464 | 48481 25502 985083 | 50 708911 | 113951 |
| 26 | 0.00216 22673 32834 197547 | 48481 25452 162221 | 50 822862 | 113953 |
| 27 | 0.00216 71154 58286 359768 | 48481 25401 225406 | 50 936815 | 113952 |
| 28 | 0.00217 19635 83687 585174 | 48481 25350 174639 | 51 050767 | 113952 |
| 29 | 0.00217 68117 09037 759813 | 48481 25299 009920 | 51 164719 | 113954 |
| 7 30 | 0.00218 16598 34336 769733 | 48481 25247 731247 | 51 278673 | 113951 |
| 31 | 0.00218 65079 59584 500980 | 48481 25196 338623 | 51 392624 | 113953 |
| 32 | 0.00219 13560 84780 839603 | 48481 25144 832046 | 51 506577 | 113952 |
| 33 | 0.00219 62042 09925 671649 | 48481 25093 211517 | 51 620529 | 113953 |
| 34 | 0.00220 10523 35018 883166 | 48481 25041 477035 | 51 734482 | 113952 |
| 7 35 | 0.00220 59004 60060 360201 | 48481 24989 628601 | 51 848434 | 113953 |
| 36 | 0.00221 07485 85049 988802 | 48481 24937 666214 | 51 962387 | 113951 |
| 37 | 0.00221 55967 09987 655016 | 48481 24885 589876 | 52 076338 | 113954 |
| 38 | 0.00222 04448 34873 244892 | 48481 24833 399584 | 52 190292 | 113952 |
| 39 | 0.00222 52929 59706 644476 | 48481 24781 095340 | 52 304244 | 113952 |
| 7 40 | 0.00223 01410 84487 739816 | 48481 24728 677144 | 52 418196 | 113953 |
| 41 | 0.00223 49892 09216 416960 | 48481 24676 144995 | 52 532149 | 113951 |
| 42 | 0.00223 98373 33892 561955 | 48481 24623 498895 | 52 646100 | 113954 |
| 43 | 0.00224 46854 58516 060850 | 48481 24570 738841 | 52 760054 | 113952 |
| 44 | 0.00224 95335 83086 799691 | 48481 24517 864835 | 52 874006 | 113952 |
| 7 45 | 0.00225 43817 07604 664526 | 48481 24464 876877 | 52 987958 | 113953 |
| 46 | 0.00225 92298 32069 541403 | 48481 24411 774966 | 53 101911 | 113952 |
| 47 | 0.00226 40779 56481 316369 | 48481 24358 559103 | 53 215863 | 113953 |
| 48 | 0.00226 89260 80839 875472 | 48481 24305 229287 | 53 329816 | 113951 |
| 49 | 0.00227 37742 05145 104759 | 48481 24251 785520 | 53 443767 | 113953 |
| 7 50 | 0.00227 86223 29396 890279 | 48481 24198 227800 | 53 557720 | 113954 |
| 51 | 0.00228 34704 53595 118079 | 48481 24144 556126 | 53 671674 | 113950 |
| 52 | 0.00228 83185 77739 674205 | 48481 24090 770502 | 53 785624 | 113953 |
| 53 | 0.00229 31667 01830 444707 | 48481 24036 870925 | 53 899577 | 113954 |
| 54 | 0.00229 80148 25867 315632 | 48481 23982 857394 | 54 013531 | 113951 |
| 7 55 | 0.00230 28629 49850 173026 | 48481 23928 729912 | 54 127482 | 113952 |
| 56 | 0.00230 77110 73778 902938 | 48481 23874 488478 | 54 241434 | 113954 |
| 57 | 0.00231 25591 97653 391416 | 48481 23820 133090 | 54 355388 | 113951 |
| 58 | 0.00231 74073 21473 524506 | 48481 23765 663751 | 54 469339 | 113952 |
| 59 | 0.00232 22554 45239 188257 | 48481 23711 080460 | 54 583291 | 113954 |
| 8 0 | 0.00232 71035 68950 268717 | | 54 697245 | |

| $\Delta\alpha$ | cos $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 7′ 20″ | 0.99999 77247 71986 592934 | | | |
| | | 103 53693 782261 | 23504 377062 | |
| 21 | 0.99999 77144 18292 810673 | | | 244 |
| | | 103 77198 159079 | 23504 376818 | |
| 22 | 0.99999 77040 41094 651594 | | | 245 |
| | | 104 00702 535652 | 23504 376573 | |
| 23 | 0.99999 76936 40392 115942 | | | 243 |
| | | 104 24206 911982 | 23504 376330 | |
| 24 | 0.99999 76832 16185 203960 | | | 245 |
| | | 104 47711 288067 | 23504 376085 | |
| | | | | 247 |
| 7 25 | 0.99999 76727 68473 915893 | | 23504 375838 | |
| | | 104 71215 663905 | | 246 |
| 26 | 0.99999 76622 97258 251988 | | 23504 375592 | |
| | | 104 94720 039497 | | 245 |
| 27 | 0.99999 76518 02538 212491 | | 23504 375347 | |
| | | 105 18224 414844 | | 248 |
| 28 | 0.99999 76412 84313 797647 | | 23504 375099 | |
| | | 105 41728 789943 | | 249 |
| 29 | 0.99999 76307 42585 007704 | | 23504 374850 | |
| | | 105 65233 164793 | | 247 |
| 7 30 | 0.99999 76201 77351 842911 | | 23504 374603 | |
| | | 105 88737 539396 | | 249 |
| 31 | 0.99999 76095 88614 303515 | | 23504 374354 | |
| | | 106 12241 913750 | | 249 |
| 32 | 0.99999 75989 76372 389765 | | 23504 374105 | |
| | | 106 35746 287855 | | 252 |
| 33 | 0.99999 75883 40626 101910 | | 23504 373853 | |
| | | 106 59250 661708 | | 248 |
| 34 | 0.99999 75776 81375 440202 | | 23504 373605 | |
| | | 106 82755 035313 | | 253 |
| 7 35 | 0.99999 75669 98620 404889 | | 23504 373352 | |
| | | 107 06259 408665 | | 250 |
| 36 | 0.99999 75562 92360 996224 | | 23504 373102 | |
| | | 107 29763 781767 | | 254 |
| 37 | 0.99999 75455 62597 214457 | | 23504 372848 | |
| | | 107 53268 154615 | | 252 |
| 38 | 0.99999 75348 09329 059842 | | 23504 372596 | |
| | | 107 76772 527211 | | 252 |
| 39 | 0.99999 75240 32556 532631 | | 23504 372344 | |
| | | 108 00276 899555 | | 256 |
| 7 40 | 0.99999 75132 32279 633076 | | 23504 372088 | |
| | | 108 23781 271643 | | 253 |
| 41 | 0.99999 75024 08498 361433 | | 23504 371835 | |
| | | 108 47285 643478 | | 256 |
| 42 | 0.99999 74915 61212 717955 | | 23504 371579 | |
| | | 108 70790 015057 | | 254 |
| 43 | 0.99999 74806 90422 702898 | | 23504 371325 | |
| | | 108 94294 386382 | | 257 |
| 44 | 0.99999 74697 96128 316516 | | 23504 371068 | |
| | | 109 17798 757450 | | 257 |
| 7 45 | 0.99999 74588 78329 559066 | | 23504 370811 | |
| | | 109 41303 128261 | | 257 |
| 46 | 0.99999 74479 37026 430805 | | 23504 370554 | |
| | | 109 64807 498815 | | 257 |
| 47 | 0.99999 74369 72218 931990 | | 23504 370297 | |
| | | 109 88311 869112 | | 259 |
| 48 | 0.99999 74259 83907 062878 | | 23504 370038 | |
| | | 110 11816 239150 | | 258 |
| 49 | 0.99999 74149 72090 823728 | | 23504 369780 | |
| | | 110 35320 608930 | | 261 |
| 7 50 | 0.99999 74039 36770 214798 | | 23504 369519 | |
| | | 110 58824 978449 | | 258 |
| 51 | 0.99999 73928 77945 236349 | | 23504 369261 | |
| | | 110 82329 347710 | | 261 |
| 52 | 0.99999 73817 95615 888639 | | 23504 369000 | |
| | | 111 05833 716710 | | 262 |
| 53 | 0.99999 73706 89782 171929 | | 23504 368738 | |
| | | 111 29338 085448 | | 261 |
| 54 | 0.99999 73595 60444 086481 | | 23504 368477 | |
| | | 111 52842 453925 | | 262 |
| 7 55 | 0.99999 73484 07601 632556 | | 23504 368215 | |
| | | 111 76346 822140 | | 263 |
| 56 | 0.99999 73372 31254 810416 | | 23504 367952 | |
| | | 111 99851 190092 | | 263 |
| 57 | 0.99999 73260 31403 620324 | | 23504 367689 | |
| | | 112 23355 557781 | | 264 |
| 58 | 0.99999 73148 08048 062543 | | 23504 367425 | |
| | | 112 46859 925206 | | 264 |
| 59 | 0.99999 73035 61188 137337 | | 23504 367161 | |
| | | 112 70364 292367 | | 265 |
| 8 0 | 0.99999 72922 90823 844970 | | 23504 366896 | |

| $\Delta\alpha$ | sin $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 8′ 0″ | 0.00232 71035 68950 268717 | | | |
| | | 48481 23656 383215 | 54 697245 | |
| 1 | 0.00233 19516 92606 651932 | | | 113952 |
| | | 48481 23601 572018 | 54 811197 | |
| 2 | 0.00233 67998 16208 223950 | | | 113951 |
| | | 48481 23546 646870 | 54 925148 | |
| 3 | 0.00234 16479 39754 870820 | | | 113954 |
| | | 48481 23491 607768 | 55 039102 | |
| 4 | 0.00234 64960 63246 478588 | | | 113951 |
| | | 48481 23436 454715 | 55 153053 | |
| 8 5 | 0.00235 13441 86682 933303 | | | 113954 |
| | | 48481 23381 187708 | 55 267007 | |
| 6 | 0.00235 61923 10064 121011 | | | 113951 |
| | | 48481 23325 806750 | 55 380958 | |
| 7 | 0.00236 10404 33389 927761 | | | 113953 |
| | | 48481 23270 311839 | 55 494911 | |
| 8 | 0.00236 58885 56660 239600 | | | 113952 |
| | | 48481 23214 702976 | 55 608863 | |
| 9 | 0.00237 07366 79874 942576 | | | 113953 |
| | | 48481 23158 980160 | 55 722816 | |
| 8 10 | 0.00237 55848 03033 922736 | | | 113952 |
| | | 48481 23103 143392 | 55 836768 | |
| 11 | 0.00238 04329 26137 066128 | | | 113952 |
| | | 48481 23047 192672 | 55 950720 | |
| 12 | 0.00238 52810 49184 258800 | | | 113953 |
| | | 48481 22991 127999 | 56 064673 | |
| 13 | 0.00239 01291 72175 386799 | | | 113952 |
| | | 48481 22934 949374 | 56 178625 | |
| 14 | 0.00239 49772 95110 336173 | | | 113952 |
| | | 48481 22878 656797 | 56 292577 | |
| 8 15 | 0.00239 98254 17988 992970 | | | 113954 |
| | | 48481 22822 250266 | 56 406531 | |
| 16 | 0.00240 46735 40811 243236 | | | 113950 |
| | | 48481 22765 729785 | 56 520481 | |
| 17 | 0.00240 95216 63576 973021 | | | 113955 |
| | | 48481 22709 095349 | 56 634436 | |
| 18 | 0.00241 43697 86286 068370 | | | 113950 |
| | | 48481 22652 346963 | 56 748386 | |
| 19 | 0.00241 92179 08938 415333 | | | 113953 |
| | | 48481 22595 484624 | 56 862339 | |
| 8 20 | 0.00242 40660 31533 899957 | | | 113953 |
| | | 48481 22538 508332 | 56 976292 | |
| 21 | 0.00242 89141 54072 408289 | | | 113952 |
| | | 48481 22481 418088 | 57 090244 | |
| 22 | 0.00243 37622 76553 826377 | | | 113952 |
| | | 48481 22424 213892 | 57 204196 | |
| 23 | 0.00243 86103 98978 040269 | | | 113954 |
| | | 48481 22366 895742 | 57 318150 | |
| 24 | 0.00244 34585 21344 936011 | | | 113950 |
| | | 48481 22309 463642 | 57 432100 | |
| 8 25 | 0.00244 83066 43654 399653 | | | 113954 |
| | | 48481 22251 917588 | 57 546054 | |
| 26 | 0.00245 31547 65906 317241 | | | 113951 |
| | | 48481 22194 257583 | 57 660005 | |
| 27 | 0.00245 80028 88100 574824 | | | 113954 |
| | | 48481 22136 483624 | 57 773959 | |
| 28 | 0.00246 28510 10237 058448 | | | 113951 |
| | | 48481 22078 595714 | 57 887910 | |
| 29 | 0.00246 76991 32315 654162 | | | 113953 |
| | | 48481 22020 593851 | 58 001863 | |
| 8 30 | 0.00247 25472 54336 248013 | | | 113952 |
| | | 48481 21962 478036 | 58 115815 | |
| 31 | 0.00247 73953 76298 726049 | | | 113953 |
| | | 48481 21904 248268 | 58 229768 | |
| 32 | 0.00248 22434 98202 974317 | | | 113951 |
| | | 48481 21845 904549 | 58 343719 | |
| 33 | 0.00248 70916 20048 878866 | | | 113954 |
| | | 48481 21787 446876 | 58 457673 | |
| 34 | 0.00249 19397 41836 325742 | | | 113952 |
| | | 48481 21728 875251 | 58 571625 | |
| 8 35 | 0.00249 67878 63565 200993 | | | 113951 |
| | | 48481 21670 189675 | 58 685576 | |
| 36 | 0.00250 16359 85235 390668 | | | 113953 |
| | | 48481 21611 390146 | 58 799529 | |
| 37 | 0.00250 64841 06846 780814 | | | 113954 |
| | | 48481 21552 476663 | 58 913483 | |
| 38 | 0.00251 13322 28399 257477 | | | 113950 |
| | | 48481 21493 449230 | 59 027433 | |
| 39 | 0.00251 61803 49892 706707 | | | 113953 |
| | | 48481 21434 307844 | 59 141386 | |
| 8 40 | 0.00252 10284 71327 014551 | | | 113953 |
| | | | 59 255339 | |

| $\Delta\alpha$ | $\cos \Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 8′ 0″ | 0.99999 72922 90823 844970 | | | |
| | | 112 93868 659263 | 23504 366896 | 265 |
| 1 | 0.99999 72809 96955 185707 | | 23504 366631 | |
| | | 113 17373 025894 | | 268 |
| 2 | 0.99999 72696 79582 159813 | | 23504 366363 | |
| | | 113 40877 392257 | | 264 |
| 3 | 0.99999 72583 38704 767556 | | 23504 366099 | |
| | | 113 64381 758356 | | 268 |
| 4 | 0.99999 72469 74323 009200 | | 23504 365831 | |
| | | 113 87886 124187 | | 269 |
| 8 5 | 0.99999 72355 86436 885013 | | 23504 365562 | |
| | | 114 11390 489749 | | 267 |
| 6 | 0.99999 72241 75046 395264 | | 23504 365295 | |
| | | 114 34894 855044 | | 268 |
| 7 | 0.99999 72127 40151 540220 | | 23504 365027 | |
| | | 114 58399 220071 | | 271 |
| 8 | 0.99999 72012 81752 320149 | | 23504 364756 | |
| | | 114 81903 584827 | | 269 |
| 9 | 0.99999 71897 99848 735322 | | 23504 364487 | |
| | | 115 05407 949314 | | 270 |
| 8 10 | 0.99999 71782 94440 786008 | | 23504 364217 | |
| | | 115 28912 313531 | | 272 |
| 11 | 0.99999 71667 65528 472477 | | 23504 363945 | |
| | | 115 52416 677476 | | 271 |
| 12 | 0.99999 71552 13111 795001 | | 23504 363674 | |
| | | 115 75921 041150 | | 272 |
| 13 | 0.99999 71436 37190 753851 | | 23504 363402 | |
| | | 115 99425 404552 | | 273 |
| 14 | 0.99999 71320 37765 349299 | | 23504 363129 | |
| | | 116 22929 767681 | | 273 |
| 8 15 | 0.99999 71204 14835 581618 | | 23504 362856 | |
| | | 116 46434 130537 | | 273 |
| 16 | 0.99999 71087 68401 451081 | | 23504 362583 | |
| | | 116 69938 493120 | | 276 |
| 17 | 0.99999 70970 98462 957961 | | 23504 362307 | |
| | | 116 93442 855427 | | 273 |
| 18 | 0.99999 70854 05020 102534 | | 23504 362034 | |
| | | 117 16947 217461 | | 277 |
| 19 | 0.99999 70736 88072 885073 | | 23504 361757 | |
| | | 117 40451 579218 | | 275 |
| 8 20 | 0.99999 70619 47621 305855 | | 23504 361482 | |
| | | 117 63955 940700 | | 276 |
| 21 | 0.99999 70501 83665 365155 | | 23504 361206 | |
| | | 117 87460 301906 | | 278 |
| 22 | 0.99999 70383 96205 063249 | | 23504 360928 | |
| | | 118 10964 662834 | | 278 |
| 23 | 0.99999 70265 85240 400415 | | 23504 360650 | |
| | | 118 34469 023484 | | 277 |
| 24 | 0.99999 70147 50771 376931 | | 23504 360373 | |
| | | 118 57973 383857 | | 279 |
| 8 25 | 0.99999 70028 92797 993074 | | 23504 360094 | |
| | | 118 81477 743951 | | 280 |
| 26 | 0.99999 69910 11320 249123 | | 23504 359814 | |
| | | 119 04982 103765 | | 280 |
| 27 | 0.99999 69791 06338 145358 | | 23504 359534 | |
| | | 119 28486 463299 | | 279 |
| 28 | 0.99999 69671 77851 682059 | | 23504 359255 | |
| | | 119 51990 822554 | | 281 |
| 29 | 0.99999 69552 25860 859505 | | 23504 358974 | |
| | | 119 75495 181528 | | 283 |
| 8 30 | 0.99999 69432 50365 677977 | | 23504 358691 | |
| | | 119 98999 540219 | | 281 |
| 31 | 0.99999 69312 51366 137758 | | 23504 358410 | |
| | | 120 22503 898629 | | 282 |
| 32 | 0.99999 69192 28862 239129 | | 23504 358128 | |
| | | 120 46008 256757 | | 285 |
| 33 | 0.99999 69071 82853 982372 | | 23504 357843 | |
| | | 120 69512 614600 | | 282 |
| 34 | 0.99999 68951 13341 367772 | | 23504 357561 | |
| | | 120 93016 972161 | | 284 |
| 8 35 | 0.99999 68830 20324 395611 | | 23504 357277 | |
| | | 121 16521 329438 | | 287 |
| 36 | 0.99999 68709 03803 066173 | | 23504 356990 | |
| | | 121 40025 686428 | | 283 |
| 37 | 0.99999 68587 63777 379745 | | 23504 356707 | |
| | | 121 63530 043135 | | 287 |
| 38 | 0.99999 68466 00247 336610 | | 23504 356420 | |
| | | 121 87034 399555 | | 286 |
| 39 | 0.99999 68344 13212 937055 | | 23504 356134 | |
| | | 122 10538 755689 | | 288 |
| 8 40 | 0.99999 68222 02674 181366 | | 23504 355846 | |

| $\Delta\alpha$ | sin $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 8′ 40″ | 0.00252 10284 71327 014551 | | | |
| | | 48481 21375 052505 | 59 255339 | |
| 41 | 0.00252 58765 92702 067056 | | | 113952 |
| | | 48481 21315 683214 | 59 369291 | |
| 42 | 0.00253 07247 14017 750270 | | | 113952 |
| | | 48481 21256 199971 | 59 483243 | |
| 43 | 0.00253 55728 35273 950241 | | | 113952 |
| | | 48481 21196 602776 | 59 597195 | |
| 44 | 0.00254 04209 56470 553017 | | | 113954 |
| | | 48481 21136 891627 | 59 711149 | |
| 8 45 | 0.00254 52690 77607 444644 | | | 113951 |
| | | 48481 21077 066527 | 59 825100 | |
| 46 | 0.00255 01171 98684 511171 | | | 113952 |
| | | 48481 21017 127475 | 59 939052 | |
| 47 | 0.00255 49653 19701 638646 | | | 113954 |
| | | 48481 20957 074469 | 60 053006 | |
| 48 | 0.00255 98134 40658 713115 | | | 113950 |
| | | 48481 20896 907513 | 60 166956 | |
| 49 | 0.00256 46615 61555 620628 | | | 113954 |
| | | 48481 20836 626603 | 60 280910 | |
| 8 50 | 0.00256 95096 82392 247231 | | | 113952 |
| | | 48481 20776 231741 | 60 394862 | |
| 51 | 0.00257 43578 03168 478972 | | | 113952 |
| | | 48481 20715 722927 | 60 508814 | |
| 52 | 0.00257 92059 23884 201899 | | | 113954 |
| | | 48481 20655 100161 | 60 622766 | |
| 53 | 0.00258 40540 44539 302060 | | | 113950 |
| | | 48481 20594 363441 | 60 736720 | |
| 54 | 0.00258 89021 65133 665501 | | | 113954 |
| | | 48481 20533 512771 | 60 850670 | |
| 8 55 | 0.00259 37502 85667 178272 | | | 113952 |
| | | 48481 20472 548147 | 60 964624 | |
| 56 | 0.00259 85984 06139 726419 | | | 113951 |
| | | 48481 20411 469571 | 61 078576 | |
| 57 | 0.00260 34465 26551 195990 | | | 113954 |
| | | 48481 20350 277044 | 61 192527 | |
| 58 | 0.00260 82946 46901 473034 | | | 113952 |
| | | 48481 20288 970563 | 61 306481 | |
| 59 | 0.00261 31427 67190 443597 | | | 113952 |
| | | 48481 20227 550130 | 61 420433 | |
| 9 0 | 0.00261 79908 87417 993727 | | | 113951 |
| | | 48481 20166 015745 | 61 534385 | |
| 1 | 0.00262 28390 07584 009472 | | | 113955 |
| | | 48481 20104 367409 | 61 648336 | |
| 2 | 0.00262 76871 27688 376881 | | | 113950 |
| | | 48481 20042 605118 | 61 762291 | |
| 3 | 0.00263 25352 47730 981999 | | | 113954 |
| | | 48481 19980 728877 | 61 876241 | |
| 4 | 0.00263 73833 67711 710876 | | | 113951 |
| | | 48481 19918 738682 | 61 990195 | |
| 9 5 | 0.00264 22314 87630 449558 | | | 113952 |
| | | 48481 19856 634536 | 62 104146 | |
| 6 | 0.00264 70796 07487 084094 | | | 113954 |
| | | 48481 19794 416438 | 62 218098 | |
| 7 | 0.00265 19277 27281 500532 | | | 113951 |
| | | 48481 19732 084386 | 62 332052 | |
| 8 | 0.00265 67758 47013 584918 | | | 113953 |
| | | 48481 19669 638383 | 62 446003 | |
| 9 | 0.00266 16239 66683 223301 | | | 113952 |
| | | 48481 19607 078427 | 62 559956 | |
| 9 10 | 0.00266 64720 86290 301728 | | | 113952 |
| | | 48481 19544 404519 | 62 673908 | |
| 11 | 0.00267 13202 05834 706247 | | | 113952 |
| | | 48481 19481 616659 | 62 787860 | |
| 12 | 0.00267 61683 25316 322906 | | | 113954 |
| | | 48481 19418 714847 | 62 901812 | |
| 13 | 0.00268 10164 44735 037753 | | | 113950 |
| | | 48481 19355 699081 | 63 015766 | |
| 14 | 0.00268 58645 64090 736834 | | | 113954 |
| | | 48481 19292 569365 | 63 129716 | |
| 9 15 | 0.00269 07126 83383 306199 | | | 113951 |
| | | 48481 19229 325695 | 63 243670 | |
| 16 | 0.00269 55608 02612 631894 | | | 113953 |
| | | 48481 19165 968074 | 63 357621 | |
| 17 | 0.00270 04089 21778 599968 | | | 113953 |
| | | 48481 19102 496500 | 63 471574 | |
| 18 | 0.00270 52570 40881 096468 | | | 113951 |
| | | 48481 19038 910973 | 63 585527 | |
| 19 | 0.00271 01051 59920 007441 | | | 113952 |
| | | 48481 18975 211495 | 63 699478 | |
| 9 20 | 0.00271 49532 78895 218936 | | 63 813430 | |

| $\Delta\alpha$ | cos $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 8′ 40″ | 0.99999 68222 02674 181366 | | | |
| | | 122 34043 111535 | 23504 355846 | 286 |
| 41 | 0.99999 68099 68631 069831 | | 23504 355560 | |
| | | 122 57547 467095 | | 289 |
| 42 | 0.99999 67977 11083 602736 | | 23504 355271 | |
| | | 122 81051 822366 | | 289 |
| 43 | 0.99999 67854 30031 780370 | | 23504 354982 | |
| | | 123 04556 177348 | | 289 |
| 44 | 0.99999 67731 25475 603022 | | 23504 354693 | |
| | | 123 28060 532041 | | 289 |
| 8 45 | 0.99999 67607 97415 070981 | | 23504 354404 | |
| | | 123 51564 886445 | | 291 |
| 46 | 0.99999 67484 45850 184536 | | 23504 354113 | |
| | | 123 75069 240558 | | 291 |
| 47 | 0.99999 67360 70780 943978 | | 23504 353822 | |
| | | 123 98573 594380 | | 291 |
| 48 | 0.99999 67236 72207 349598 | | 23504 353531 | |
| | | 124 22077 947911 | | 292 |
| 49 | 0.99999 67112 50129 401687 | | 23504 353239 | |
| | | 124 45582 301150 | | 293 |
| 8 50 | 0.99999 66988 04547 100537 | | 23504 352946 | |
| | | 124 69086 654096 | | 293 |
| 51 | 0.99999 66863 35460 446441 | | 23504 352653 | |
| | | 124 92591 006749 | | 293 |
| 52 | 0.99999 66738 42869 439692 | | 23504 352360 | |
| | | 125 16095 359109 | | 294 |
| 53 | 0.99999 66613 26774 080583 | | 23504 352066 | |
| | | 125 39599 711175 | | 296 |
| 54 | 0.99999 66487 87174 369408 | | 23504 351770 | |
| | | 125 63104 062945 | | 294 |
| 8 55 | 0.99999 66362 24070 306463 | | 23504 351476 | |
| | | 125 86608 414421 | | 297 |
| 56 | 0.99999 66236 37461 892042 | | 23504 351179 | |
| | | 126 10112 765600 | | 296 |
| 57 | 0.99999 66110 27349 126442 | | 23504 350883 | |
| | | 126 33617 116483 | | 296 |
| 58 | 0.99999 65983 93732 009959 | | 23504 350587 | |
| | | 126 57121 467070 | | 299 |
| 59 | 0.99999 65857 36610 542889 | | 23504 350288 | |
| | | 126 80625 817358 | | 297 |
| 9 0 | 0.99999 65730 55984 725531 | | 23504 349991 | |
| | | 127 04130 167349 | | 299 |
| 1 | 0.99999 65603 51854 558182 | | 23504 349692 | |
| | | 127 27634 517041 | | 299 |
| 2 | 0.99999 65476 24220 041141 | | 23504 349393 | |
| | | 127 51138 866434 | | 300 |
| 3 | 0.99999 65348 73081 174707 | | 23504 349093 | |
| | | 127 74643 215527 | | 299 |
| 4 | 0.99999 65220 98437 959180 | | 23504 348794 | |
| | | 127 98147 564321 | | 303 |
| 9 5 | 0.99999 65093 00290 394859 | | 23504 348491 | |
| | | 128 21651 912812 | | 300 |
| 6 | 0.99999 64964 78638 482047 | | 23504 348191 | |
| | | 128 45156 261003 | | 302 |
| 7 | 0.99999 64836 33482 221044 | | 23504 347889 | |
| | | 128 68660 608892 | | 303 |
| 8 | 0.99999 64707 64821 612152 | | 23504 347586 | |
| | | 128 92164 956478 | | 302 |
| 9 | 0.99999 64578 72656 655674 | | 23504 347284 | |
| | | 129 15669 303762 | | 304 |
| 9 10 | 0.99999 64449 56987 351912 | | 23504 346980 | |
| | | 129 39173 650742 | | 305 |
| 11 | 0.99999 64320 17813 701170 | | 23504 346675 | |
| | | 129 62677 997417 | | 304 |
| 12 | 0.99999 64190 55135 703753 | | 23504 346371 | |
| | | 129 86182 343788 | | 305 |
| 13 | 0.99999 64060 68953 359965 | | 23504 346066 | |
| | | 130 09686 689854 | | 306 |
| 14 | 0.99999 63930 59266 670111 | | 23504 345760 | |
| | | 130 33191 035614 | | 307 |
| 9 15 | 0.99999 63800 26075 634497 | | 23504 345453 | |
| | | 130 56695 381067 | | 306 |
| 16 | 0.99999 63669 69380 253430 | | 23504 345147 | |
| | | 130 80199 726214 | | 307 |
| 17 | 0.99999 63538 89180 527216 | | 23504 344840 | |
| | | 131 03704 071054 | | 309 |
| 18 | 0.99999 63407 85476 456162 | | 23504 344531 | |
| | | 131 27208 415585 | | 309 |
| 19 | 0.99999 63276 58268 040577 | | 23504 344222 | |
| | | 131 50712 759807 | | 308 |
| 9 20 | 0.99999 63145 07555 280770 | | 23504 343914 | |

| $\Delta\alpha$ | sin $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 9′ 20″ | 0.00271 49532 78895 218936 | | | |
| | | 48481 18911 398065 | 63 813430 | |
| 21 | 0.00271 98013 97806 617001 | | | 113954 |
| | | 48481 18847 470681 | 63 927384 | |
| 22 | 0.00272 46495 16654 087682 | | | 113951 |
| | | 48481 18783 429346 | 64 041335 | |
| 23 | 0.00272 94976 35437 517028 | | | 113953 |
| | | 48481 18719 274058 | 64 155288 | |
| 24 | 0.00273 43457 54156 791086 | | | 113952 |
| | | 48481 18655 004818 | 64 269240 | |
| 9 25 | 0.00273 91938 72811 795904 | | | 113951 |
| | | 48481 18590 621627 | 64 383191 | |
| 26 | 0.00274 40419 91402 417531 | | | 113954 |
| | | 48481 18526 124482 | 64 497145 | |
| 27 | 0.00274 88901 09928 542013 | | | 113952 |
| | | 48481 18461 513385 | 64 611097 | |
| 28 | 0.00275 37382 28390 055398 | | | 113951 |
| | | 48481 18396 788337 | 64 725048 | |
| 29 | 0.00275 85863 46786 843735 | | | 113954 |
| | | 48481 18331 949335 | 64 839002 | |
| 9 30 | 0.00276 34344 65118 793070 | | | 113951 |
| | | 48481 18266 996382 | 64 952953 | |
| 31 | 0.00276 82825 83385 789452 | | | 113953 |
| | | 48481 18201 929476 | 65 066906 | |
| 32 | 0.00277 31307 01587 718928 | | | 113952 |
| | | 48481 18136 748618 | 65 180858 | |
| 33 | 0.00277 79788 19724 467546 | | | 113952 |
| | | 48481 18071 453808 | 65 294810 | |
| 34 | 0.00278 28269 37795 921354 | | | 113953 |
| | | 48481 18006 045045 | 65 408763 | |
| 9 35 | 0.00278 76750 55801 966399 | | | 113951 |
| | | 48481 17940 522331 | 65 522714 | |
| 36 | 0.00279 25231 73742 488730 | | | 113953 |
| | | 48481 17874 885664 | 65 636667 | |
| 37 | 0.00279 73712 91617 374394 | | | 113952 |
| | | 48481 17809 135045 | 65 750619 | |
| 38 | 0.00280 22194 09426 509439 | | | 113953 |
| | | 48481 17743 270473 | 65 864572 | |
| 39 | 0.00280 70675 27169 779912 | | | 113952 |
| | | 48481 17677 291949 | 65 978524 | |
| 9 40 | 0.00281 19156 44847 071861 | | | 113951 |
| | | 48481 17611 199474 | 66 092475 | |
| 41 | 0.00281 67637 62458 271335 | | | 113954 |
| | | 48481 17544 993045 | 66 206429 | |
| 42 | 0.00282 16118 80003 264380 | | | 113951 |
| | | 48481 17478 672665 | 66 320380 | |
| 43 | 0.00282 64599 97481 937045 | | | 113953 |
| | | 48481 17412 238332 | 66 434333 | |
| 44 | 0.00283 13081 14894 175377 | | | 113952 |
| | | 48481 17345 690047 | 66 548285 | |
| 9 45 | 0.00283 61562 32239 865424 | | | 113952 |
| | | 48481 17279 027810 | 66 662237 | |
| 46 | 0.00284 10043 49518 893234 | | | 113952 |
| | | 48481 17212 251621 | 66 776189 | |
| 47 | 0.00284 58524 66731 144855 | | | 113953 |
| | | 48481 17145 361479 | 66 890142 | |
| 48 | 0.00285 07005 83876 506334 | | | 113952 |
| | | 48481 17078 357385 | 67 004094 | |
| 49 | 0.00285 55487 00954 863719 | | | 113952 |
| | | 48481 17011 239339 | 67 118046 | |
| 9 50 | 0.00286 03968 17966 103058 | | | 113952 |
| | | 48481 16944 007341 | 67 231998 | |
| 51 | 0.00286 52449 34910 110399 | | | 113953 |
| | | 48481 16876 661390 | 67 345951 | |
| 52 | 0.00287 00930 51786 771789 | | | 113951 |
| | | 48481 16809 201488 | 67 459902 | |
| 53 | 0.00287 49411 68595 973277 | | | 113954 |
| | | 48481 16741 627632 | 67 573856 | |
| 54 | 0.00287 97892 85337 600909 | | | 113951 |
| | | 48481 16673 939825 | 67 687807 | |
| 9 55 | 0.00288 46374 02011 540734 | | | 113952 |
| | | 48481 16606 138066 | 67 801759 | |
| 56 | 0.00288 94855 18617 678800 | | | 113953 |
| | | 48481 16538 222354 | 67 915712 | |
| 57 | 0.00289 43336 35155 901154 | | | 113952 |
| | | 48481 16470 192690 | 68 029664 | |
| 58 | 0.00289 91817 51626 093844 | | | 113951 |
| | | 48481 16402 049075 | 68 143615 | |
| 59 | 0.00290 40298 68028 142919 | | | 113955 |
| | | 48481 16333 791505 | 68 257570 | |
| | | | | 113949 |
| 10 0 | 0.00290 88779 84361 934424 | | 68 371519 | |

| $\Delta\alpha$ | cos $\Delta\alpha$ | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 9' 20" | 0.99999 63145 07555 280770 | | | |
| | | 131 74217 103721 | 23504 343914 | 309 |
| 21 | 0.99999 63013 33338 177049 | | 23504 343605 | |
| | | 131 97721 447326 | | 312 |
| 22 | 0.99999 62881 35616 729723 | | 23504 343293 | |
| | | 132 21225 790619 | | 310 |
| 23 | 0.99999 62749 14390 939104 | | 23504 342983 | |
| | | 132 44730 133602 | | 311 |
| 24 | 0.99999 62616 69660 805502 | | 23504 342672 | |
| | | 132 68234 476274 | | 313 |
| 9 25 | 0.99999 62484 01426 329228 | | 23504 342359 | |
| | | 132 91738 818633 | | 311 |
| 26 | 0.99999 62351 09687 510595 | | 23504 342048 | |
| | | 133 15243 160681 | | 313 |
| 27 | 0.99999 62217 94444 349914 | | 23504 341735 | |
| | | 133 38747 502416 | | 315 |
| 28 | 0.99999 62084 55696 847498 | | 23504 341420 | |
| | | 133 62251 843836 | | 312 |
| 29 | 0.99999 61950 93445 003662 | | 23504 341108 | |
| | | 133 85756 184944 | | 317 |
| 9 30 | 0.99999 61817 07688 818718 | | 23504 340791 | |
| | | 134 09260 525735 | | 313 |
| 31 | 0.99999 61682 98428 292983 | | 23504 340478 | |
| | | 134 32764 866213 | | 317 |
| 32 | 0.99999 61548 65663 426770 | | 23504 340161 | |
| | | 134 56269 206374 | | 315 |
| 33 | 0.99999 61414 09394 220396 | | 23504 339846 | |
| | | 134 79773 546220 | | 319 |
| 34 | 0.99999 61279 29620 674176 | | 23504 339527 | |
| | | 135 03277 885747 | | 316 |
| 9 35 | 0.99999 61144 26342 788429 | | 23504 339211 | |
| | | 135 26782 224958 | | 317 |
| 36 | 0.99999 61008 99560 563471 | | 23504 338894 | |
| | | 135 50286 563852 | | 321 |
| 37 | 0.99999 60873 49273 999619 | | 23504 338573 | |
| | | 135 73790 902425 | | 317 |
| 38 | 0.99999 60737 75483 097194 | | 23504 338256 | |
| | | 135 97295 240681 | | 320 |
| 39 | 0.99999 60601 78187 856513 | | 23504 337936 | |
| | | 136 20799 578617 | | 320 |
| 9 40 | 0.99999 60465 57388 277896 | | 23504 337616 | |
| | | 136 44303 916233 | | 322 |
| 41 | 0.99999 60329 13084 361663 | | 23504 337294 | |
| | | 136 67808 253527 | | 320 |
| 42 | 0.99999 60192 45276 108136 | | 23504 336974 | |
| | | 136 91312 590501 | | 322 |
| 43 | 0.99999 60055 53963 517635 | | 23504 336652 | |
| | | 137 14816 927153 | | 323 |
| 44 | 0.99999 59918 39146 590482 | | 23504 336329 | |
| | | 137 38321 263482 | | 322 |
| 9 45 | 0.99999 59781 00825 327000 | | 23504 336007 | |
| | | 137 61825 599489 | | 323 |
| 46 | 0.99999 59643 38999 727511 | | 23504 335684 | |
| | | 137 85329 935173 | | 326 |
| 47 | 0.99999 59505 53669 792338 | | 23504 335358 | |
| | | 138 08834 270531 | | 323 |
| 48 | 0.99999 59367 44835 521807 | | 23504 335035 | |
| | | 138 32338 605566 | | 326 |
| 49 | 0.99999 59229 12496 916241 | | 23504 334709 | |
| | | 138 55842 940275 | | 325 |
| 9 50 | 0.99999 59090 56653 975966 | | 23504 334384 | |
| | | 138 79347 274659 | | 326 |
| 51 | 0.99999 58951 77306 701307 | | 23504 334058 | |
| | | 139 02851 608717 | | 328 |
| 52 | 0.99999 58812 74455 092590 | | 23504 333730 | |
| | | 139 26355 942447 | | 326 |
| 53 | 0.99999 58673 48099 150143 | | 23504 333404 | |
| | | 139 49860 275851 | | 329 |
| 54 | 0.99999 58533 98238 874292 | | 23504 333075 | |
| | | 139 73364 608926 | | 328 |
| 9 55 | 0.99999 58394 24874 265366 | | 23504 332747 | |
| | | 139 96868 941673 | | 328 |
| 56 | 0.99999 58254 28005 323693 | | 23504 332419 | |
| | | 140 20373 274092 | | 331 |
| 57 | 0.99999 58114 07632 049601 | | 23504 332088 | |
| | | 140 43877 606180 | | 329 |
| 58 | 0.99999 57973 63754 443421 | | 23504 331759 | |
| | | 140 67381 937939 | | 332 |
| 59 | 0.99999 57832 96372 505482 | | 23504 331427 | |
| | | 140 90886 269366 | | 330 |
| 10 0 | 0.99999 57692 05486 236116 | | 23504 331097 | |

# Hilfstafeln.

1. Vielfache des Moduls $M$.
2. Vielfache von arc 1″.
3. Vielfache des reziproken Moduls 1 : $M$.

Vielfache des Moduls $M$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.43429 | 44819 | 03251 | 827651 |
| 2 | 0.86858 | 89638 | 06503 | 655302 |
| 3 | 1.30288 | 34457 | 09755 | 482953 |
| 4 | 1.73717 | 79276 | 13007 | 310605 |
| 5 | 2.17147 | 24095 | 16259 | 138256 |
| 6 | 2.60576 | 68914 | 19510 | 965907 |
| 7 | 3.04006 | 13733 | 22762 | 793558 |
| 8 | 3.47435 | 58552 | 26014 | 621209 |
| 9 | 3.90865 | 03371 | 29266 | 448860 |
| 10 | 4.34294 | 48190 | 32518 | 276511 |
| 11 | 4.77723 | 93009 | 35770 | 104162 |
| 12 | 5.21153 | 37828 | 39021 | 931814 |
| 13 | 5.64582 | 82647 | 42273 | 759465 |
| 14 | 6.08012 | 27466 | 45525 | 587116 |
| 15 | 6.51441 | 72285 | 48777 | 414767 |
| 16 | 6.94871 | 17104 | 52029 | 242418 |
| 17 | 7.38300 | 61923 | 55281 | 070069 |
| 18 | 7.81730 | 06742 | 58532 | 897720 |
| 19 | 8.25159 | 51561 | 61784 | 725371 |
| 20 | 8.68588 | 96380 | 65036 | 553023 |
| 21 | 9.12018 | 41199 | 68288 | 380674 |
| 22 | 9.55447 | 86018 | 71540 | 208325 |
| 23 | 9.98877 | 30837 | 74792 | 035976 |
| 24 | 10.42306 | 75656 | 78043 | 863627 |
| 25 | 10.85736 | 20475 | 81295 | 691278 |
| 26 | 11.29165 | 65294 | 84547 | 518929 |
| 27 | 11.72595 | 10113 | 87799 | 346580 |
| 28 | 12.16024 | 54932 | 91051 | 174232 |
| 29 | 12.59453 | 99751 | 94303 | 001883 |
| 30 | 13.02883 | 44570 | 97554 | 829534 |
| 31 | 13.46312 | 89390 | 00806 | 657185 |
| 32 | 13.89742 | 34209 | 04058 | 484836 |
| 33 | 14.33171 | 79028 | 07310 | 312487 |
| 34 | 14.76601 | 23847 | 10562 | 140138 |
| 35 | 15.20030 | 68666 | 13813 | 967790 |
| 36 | 15.63460 | 13485 | 17065 | 795441 |
| 37 | 16.06889 | 58304 | 20317 | 623092 |
| 38 | 16.50319 | 03123 | 23569 | 450743 |
| 39 | 16.93748 | 47942 | 26821 | 278394 |
| 40 | 17.37177 | 92761 | 30073 | 106045 |
| 41 | 17.80607 | 37580 | 33324 | 933696 |
| 42 | 18.24036 | 82399 | 36576 | 761347 |
| 43 | 18.67466 | 27218 | 39828 | 588999 |
| 44 | 19.10895 | 72037 | 43080 | 416650 |
| 45 | 19.54325 | 16856 | 46332 | 244301 |
| 46 | 19.97754 | 61675 | 49584 | 071952 |
| 47 | 20.41184 | 06494 | 52835 | 899603 |
| 48 | 20.84613 | 51313 | 56087 | 727254 |
| 49 | 21.28042 | 96132 | 59339 | 554905 |
| 50 | 21.71472 | 40951 | 62591 | 382556 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 22.14901 | 85770 | 65843 | 210208 |
| 52 | 22.58331 | 30589 | 69095 | 037859 |
| 53 | 23.01760 | 75408 | 72346 | 865510 |
| 54 | 23.45190 | 20227 | 75598 | 693161 |
| 55 | 23.88619 | 65046 | 78850 | 520812 |
| 56 | 24.32049 | 09865 | 82102 | 348463 |
| 57 | 24.75478 | 54684 | 85354 | 176114 |
| 58 | 25.18907 | 99503 | 88606 | 003765 |
| 59 | 25.62337 | 44322 | 91857 | 831417 |
| 60 | 26.05766 | 89141 | 95109 | 659068 |
| 61 | 26.49196 | 33960 | 98361 | 486719 |
| 62 | 26.92625 | 78780 | 01613 | 314370 |
| 63 | 27.36055 | 23599 | 04865 | 142021 |
| 64 | 27.79484 | 68418 | 08116 | 969672 |
| 65 | 28.22914 | 13237 | 11368 | 797323 |
| 66 | 28.66343 | 58056 | 14620 | 624975 |
| 67 | 29.09773 | 02875 | 17872 | 452626 |
| 68 | 29.53202 | 47694 | 21124 | 280277 |
| 69 | 29.96631 | 92513 | 24376 | 107928 |
| 70 | 30.40061 | 37332 | 27627 | 935579 |
| 71 | 30.83490 | 82151 | 30879 | 763230 |
| 72 | 31.26920 | 26970 | 34131 | 590881 |
| 73 | 31.70349 | 71789 | 37383 | 418532 |
| 74 | 32.13779 | 16608 | 40635 | 246184 |
| 75 | 32.57208 | 61427 | 43887 | 073835 |
| 76 | 33.00638 | 06246 | 47138 | 901486 |
| 77 | 33.44067 | 51065 | 50390 | 729137 |
| 78 | 33.87496 | 95884 | 53642 | 556788 |
| 79 | 34.30926 | 40703 | 56894 | 384439 |
| 80 | 34.74355 | 85522 | 60146 | 212090 |
| 81 | 35.17785 | 30341 | 63398 | 039741 |
| 82 | 35.61214 | 75160 | 66649 | 867393 |
| 83 | 36.04644 | 19979 | 69901 | 695044 |
| 84 | 36.48073 | 64798 | 73153 | 522695 |
| 85 | 36.91503 | 09617 | 76405 | 350346 |
| 86 | 37.34932 | 54436 | 79657 | 177997 |
| 87 | 37.78361 | 99255 | 82909 | 005648 |
| 88 | 38.21791 | 44074 | 86160 | 833299 |
| 89 | 38.65220 | 88893 | 89412 | 660950 |
| 90 | 39.08650 | 33712 | 92664 | 488602 |
| 91 | 39.52079 | 78531 | 95916 | 316253 |
| 92 | 39.95509 | 23350 | 99168 | 143904 |
| 93 | 40.38938 | 68170 | 02419 | 971555 |
| 94 | 40.82368 | 12989 | 05671 | 799206 |
| 95 | 41.25797 | 57808 | 08923 | 626857 |
| 96 | 41.69227 | 02627 | 12175 | 454508 |
| 97 | 42.12656 | 47446 | 15427 | 282160 |
| 98 | 42.56085 | 92265 | 18679 | 109811 |
| 99 | 42.99515 | 37084 | 21930 | 937462 |
| 100 | 43.42944 | 81903 | 25182 | 765113 |

Vielfache von arc 1″.

| | |
|---|---|
| 1 | 0.00000 48481 36811 095360 |
| 2 | 0.00000 96962 73622 190720 |
| 3 | 0.00001 45444 10433 286080 |
| 4 | 0.00001 93925 47244 381440 |
| 5 | 0.00002 42406 84055 476800 |
| 6 | 0.00002 90888 20866 572160 |
| 7 | 0.00003 39369 57677 667520 |
| 8 | 0.00003 87850 94488 762879 |
| 9 | 0.00004 36332 31299 858239 |
| 10 | 0.00004 84813 68110 953599 |
| 11 | 0.00005 33295 04922 048959 |
| 12 | 0.00005 81776 41733 144319 |
| 13 | 0.00006 30257 78544 239679 |
| 14 | 0.00006 78739 15355 335039 |
| 15 | 0.00007 27220 52166 430399 |
| 16 | 0.00007 75701 88977 525759 |
| 17 | 0.00008 24183 25788 621119 |
| 18 | 0.00008 72664 62599 716479 |
| 19 | 0.00009 21145 99410 811839 |
| 20 | 0.00009 69627 36221 907199 |
| 21 | 0.00010 18108 73033 002559 |
| 22 | 0.00010 66590 09844 097919 |
| 23 | 0.00011 15071 46655 193279 |
| 24 | 0.00011 63552 83466 288638 |
| 25 | 0.00012 12034 20277 383998 |
| 26 | 0.00012 60515 57088 479358 |
| 27 | 0.00013 08996 93899 574718 |
| 28 | 0.00013 57478 30710 670078 |
| 29 | 0.00014 05959 67521 765438 |
| 30 | 0.00014 54441 04332 860798 |
| 31 | 0.00015 02922 41143 956158 |
| 32 | 0.00015 51403 77955 051518 |
| 33 | 0.00015 99885 14766 146878 |
| 34 | 0.00016 48366 51577 242238 |
| 35 | 0.00016 96847 88388 337598 |
| 36 | 0.00017 45329 25199 432958 |
| 37 | 0.00017 93810 62010 528318 |
| 38 | 0.00018 42291 98821 623678 |
| 39 | 0.00018 90773 35632 719038 |
| 40 | 0.00019 39254 72443 814397 |
| 41 | 0.00019 87736 09254 909757 |
| 42 | 0.00020 36217 46066 005117 |
| 43 | 0.00020 84698 82877 100477 |
| 44 | 0.00021 33180 19688 195837 |
| 45 | 0.00021 81661 56499 291197 |
| 46 | 0.00022 30142 93310 386557 |
| 47 | 0.00022 78624 30121 481917 |
| 48 | 0.00023 27105 66932 577277 |
| 49 | 0.00023 75587 03743 672637 |
| 50 | 0.00024 24068 40554 767997 |

| | |
|---|---|
| 51 | 0.00024 72549 77365 863357 |
| 52 | 0.00025 21031 14176 958717 |
| 53 | 0.00025 69512 50988 054077 |
| 54 | 0.00026 17993 87799 149437 |
| 55 | 0.00026 66475 24610 244796 |
| 56 | 0.00027 14956 61421 340156 |
| 57 | 0.00027 63437 98232 435516 |
| 58 | 0.00028 11919 35043 530876 |
| 59 | 0.00028 60400 71854 626236 |
| 60 | 0.00029 08882 08665 721596 |
| 61 | 0.00029 57363 45476 816956 |
| 62 | 0.00030 05844 82287 912316 |
| 63 | 0.00030 54326 19099 007676 |
| 64 | 0.00031 02807 55910 103036 |
| 65 | 0.00031 51288 92721 198396 |
| 66 | 0.00031 99770 29532 293756 |
| 67 | 0.00032 48251 66343 389116 |
| 68 | 0.00032 96733 03154 484476 |
| 69 | 0.00033 45214 39965 579836 |
| 70 | 0.00033 93695 76776 675196 |
| 71 | 0.00034 42177 13587 770555 |
| 72 | 0.00034 90658 50398 865915 |
| 73 | 0.00035 39139 87209 961275 |
| 74 | 0.00035 87621 24021 056635 |
| 75 | 0.00036 36102 60832 151995 |
| 76 | 0.00036 84583 97643 247355 |
| 77 | 0.00037 33065 34454 342715 |
| 78 | 0.00037 81546 71265 438075 |
| 79 | 0.00038 30028 08076 533435 |
| 80 | 0.00038 78509 44887 628795 |
| 81 | 0.00039 26990 81698 724155 |
| 82 | 0.00039 75472 18509 819515 |
| 83 | 0.00040 23953 55320 914875 |
| 84 | 0.00040 72434 92132 010235 |
| 85 | 0.00041 20916 28943 105595 |
| 86 | 0.00041 69397 65754 200954 |
| 87 | 0.00042 17879 02565 296314 |
| 88 | 0.00042 66360 39376 391674 |
| 89 | 0.00043 14841 76187 487034 |
| 90 | 0.00043 63323 12998 582394 |
| 91 | 0.00044 11804 49809 677754 |
| 92 | 0.00044 60285 86620 773114 |
| 93 | 0.00045 08767 23431 868474 |
| 94 | 0.00045 57248 60242 963834 |
| 95 | 0.00046 05729 97054 059194 |
| 96 | 0.00046 54211 33865 154554 |
| 97 | 0.00047 02692 70676 249914 |
| 98 | 0.00047 51174 07487 345274 |
| 99 | 0.00047 99655 44298 440634 |
| 100 | 0.00048 48136 81109 535994 |

Vielfache des reziproken Moduls $1 : M$.

| | |
|---|---|
| 1 | 2.30258 50929 94045 684018 |
| 2 | 4.60517 01859 88091 368036 |
| 3 | 6.90775 52789 82137 052054 |
| 4 | 9.21034 03719 76182 736072 |
| 5 | 11.51292 54649 70228 420090 |
| 6 | 13.81551 05579 64274 104108 |
| 7 | 16.11809 56509 58319 788126 |
| 8 | 18.42068 07439 52365 472144 |
| 9 | 20.72326 58369 46411 156162 |
| 10 | 23.02585 09299 40456 840180 |
| 11 | 25.32843 60229 34502 524198 |
| 12 | 27.63102 11159 28548 208216 |
| 13 | 29.93360 62089 22593 892234 |
| 14 | 32.23619 13019 16639 576252 |
| 15 | 34.53877 63949 10685 260270 |
| 16 | 36.84136 14879 04730 944288 |
| 17 | 39.14394 65808 98776 628306 |
| 18 | 41.44653 16738 92822 312324 |
| 19 | 43.74911 67668 86867 996342 |
| 20 | 46.05170 18598 80913 680360 |
| 21 | 48.35428 69528 74959 364378 |
| 22 | 50.65687 20458 69005 048396 |
| 23 | 52.95945 71388 63050 732414 |
| 24 | 55.26204 22318 57096 416432 |
| 25 | 57.56462 73248 51142 100450 |
| 26 | 59.86721 24178 45187 784468 |
| 27 | 62.16979 75108 39233 468486 |
| 28 | 64.47238 26038 33279 152504 |
| 29 | 66.77496 76968 27324 836522 |
| 30 | 69.07755 27898 21370 520540 |
| 31 | 71.38013 78828 15416 204558 |
| 32 | 73.68272 29758 09461 888576 |
| 33 | 75.98530 80688 03507 572594 |
| 34 | 78.28789 31617 97553 256612 |
| 35 | 80.59047 82547 91598 940630 |
| 36 | 82.89306 33477 85644 624648 |
| 37 | 85.19564 84407 79690 308666 |
| 38 | 87.49823 35337 73735 992684 |
| 39 | 89.80081 86267 67781 676702 |
| 40 | 92.10340 37197 61827 360720 |
| 41 | 94.40598 88127 55873 044738 |
| 42 | 96.70857 39057 49918 728756 |
| 43 | 99.01115 89987 43964 412774 |
| 44 | 101.31374 40917 38010 096792 |
| 45 | 103.61632 91847 32055 780810 |
| 46 | 105.91891 42777 26101 464828 |
| 47 | 108.22149 93707 20147 148846 |
| 48 | 110.52408 44637 14192 832864 |
| 49 | 112.82666 95567 08238 516882 |
| 50 | 115.12925 46497 02284 200900 |

| | |
|---|---|
| 51 | 117.43183 97426 96329 884918 |
| 52 | 119.73442 48356 90375 568936 |
| 53 | 122.03700 99286 84421 252954 |
| 54 | 124.33959 50216 78466 936972 |
| 55 | 126.64218 01146 72512 620990 |
| 56 | 128.94476 52076 66558 305008 |
| 57 | 131.24735 03006 60603 989026 |
| 58 | 133.54993 53936 54649 673044 |
| 59 | 135.85252 04866 48695 357061 |
| 60 | 138.15510 55796 42741 041079 |
| 61 | 140.45769 06726 36786 725097 |
| 62 | 142.76027 57656 30832 409115 |
| 63 | 145.06286 08586 24878 093133 |
| 64 | 147.36544 59516 18923 777151 |
| 65 | 149.66803 10446 12969 461169 |
| 66 | 151.97061 61376 07015 145187 |
| 67 | 154.27320 12306 01060 829205 |
| 68 | 156.57578 63235 95106 513223 |
| 69 | 158.87837 14165 89152 197241 |
| 70 | 161.18095 65095 83197 881259 |
| 71 | 163.48354 16025 77243 565277 |
| 72 | 165.78612 66955 71289 249295 |
| 73 | 168.08871 17885 65334 933313 |
| 74 | 170.39129 68815 59380 617331 |
| 75 | 172.69388 19745 53426 301349 |
| 76 | 174.99646 70675 47471 985367 |
| 77 | 177.29905 21605 41517 669385 |
| 78 | 179.60163 72535 35563 353403 |
| 79 | 181.90422 23465 29609 037421 |
| 80 | 184.20680 74395 23654 721439 |
| 81 | 186.50939 25325 17700 405457 |
| 82 | 188.81197 76255 11746 089475 |
| 83 | 191.11456 27185 05791 773493 |
| 84 | 193.41714 78114 99837 457511 |
| 85 | 195.71973 29044 93883 141529 |
| 86 | 198.02231 79974 87928 825547 |
| 87 | 200.32490 30904 81974 509565 |
| 88 | 202.62748 81834 76020 193583 |
| 89 | 204.93007 32764 70065 877601 |
| 90 | 207.23265 83694 64111 561619 |
| 91 | 209.53524 34624 58157 245637 |
| 92 | 211.83782 85554 52202 929655 |
| 93 | 214.14041 36484 46248 613673 |
| 94 | 216.44299 87414 40294 297691 |
| 95 | 218.74558 38344 34339 981709 |
| 96 | 221.04816 89274 28385 665727 |
| 97 | 223.35075 40204 22431 349745 |
| 98 | 225.65333 91134 16477 033763 |
| 99 | 227.95592 42064 10522 717781 |
| 100 | 230.25850 92994 04568 401799 |

# Über die Kerne des Diencephalon bei einigen Säugetieren.

Von

Dr. M. NEIDING.

Vorgelegt von Hrn. Waldeyer in der Gesamtsitzung am 23. Februar 1911.
Zum Druck verordnet am gleichen Tage, ausgegeben am 13. Juli 1911.

Bevor ich beginne, die Ergebnisse meiner Untersuchungen darzustellen, die ich auf Anregung des Hrn. Professors Dr. L. Jacobsohn unternommen und in seinem Laboratorium ausgeführt habe, möchte ich auf den Zweck und die Grundlage meiner Arbeit hinweisen.

Wie bekannt, war Forel der erste, der das Diencephalon des Menschen und der Säugetiere einem gründlichen vergleichend-anatomischen Studium unterworfen hat. Sein wichtigstes Verdienst besteht in der Feststellung des Baues der Regio Subthalamica, des Meta- und Epithalamus. Dem Thalamus im engeren Sinne des Wortes hat er jedoch wenig Aufmerksamkeit gewidmet. Ohne die Bedeutung der Arbeiten Forels verkleinern zu wollen, die ja als Basis aller späteren Untersuchungen über den Bau des Zwischenhirns angesehen werden müssen, muß man doch sagen, daß seine Angaben über die Kerne zum Teil unvollständig, zum Teil auch nicht ganz richtig sind.

Die Lücke in bezug auf den Thalamus wurde zum Teil durch Nißl (46), der die betreffenden Kerne beim Kaninchen, teils durch von Monakow (43) ausgefüllt, der sie beim Menschen und bei den Karnivoren beschrieben hat. Was aber die Homologisierung der Thalamuskerne bei den Säugetieren und beim Menschen anbetrifft, so wurde die Möglichkeit einer solchen von einigen Autoren (Forel) verneint, von anderen (Ganser, von Monakow) in Zweifel gezogen.

Die vorliegende Arbeit ist ein Versuch, die graue Substanz des Diencephalon des Igels, des Kaninchens, des Hundes und des Affen (Macacus rhesus) in einzelne Kerne zu zerlegen.

In dieser Richtung ist am besten das Kaninchen und der Hund, weniger der Affe und fast gar nicht der Igel untersucht worden; die Autoren haben dabei nur einzelne Teile des Diencephalon untersucht. Soviel mir wenigstens bekannt ist, ist jedoch seit Forel keine Arbeit über die sämtlichen Kerne des Diencephalon aller dieser Tiere erschienen.

Nach einem von jedem voreingenommenen Standpunkt freien Studium dieser Kerne bei jedem der erwähnten Tiere wandte ich mich zur vergleichend-anatomischen Betrachtung des Gegenstandes. Somit hat die ganze Arbeit einen histologischen und vergleichend-anatomischen Charakter. Ich glaube jedoch hoffen zu dürfen, daß die Ergebnisse meiner Arbeit auch einen gewissen physiologischen Wert besitzen werden. Mit Rücksicht auf die Unmöglichkeit ein reines Experiment an den einzelnen Kernen des Thalamus zu veranstalten, ist ja der Physiologe gezwungen, die Funktion des Thalamus aus den vergleichend- bzw. experimentell-anatomischen Ergebnissen zu erschließen. (S. Hermanns Lehrbuch der Physiologie 1910, S. 296.)

Die Lehre von den Kernen des Thalamus begann damit, daß Burdach (9), Luys (35), Meynert (39), Forel (21), Schnopfhagen (53) seine graue Substanz in Abteilungen — von ihnen sogenannte »Kerne« — zerlegten, die durch Markblätter voneinander geschieden sind. Ganser (23), der zum Teil auch diese äußere Abgrenzung beibehalten hatte, brachte für die Differenzierung der grauen Substanz des Thalamus noch ein anderes Prinzip zur Geltung, nämlich »die elementare Zusammensetzung der einzelnen Partien«, ein Prinzip, das bereits früher durch Stieda (52) bei seinen Untersuchungen über die Kerne des Rückenmarks und des Hirnstammes eingeführt worden war. Dies Prinzip konnte jedoch erst nach der Nißlschen Erfindung seines Verfahrens der elektiven Zellenfärbung ausgiebig benutzt werden. Schon Nißl (46) selbst wandte seine Methode auf die Differenzierung der grauen Massen des Thalamus des Kaninchens in einzelne Kerne an, indem er für die Zuzählung der Zellen zu diesem oder jenem Kern als leitenden Gesichtspunkt die Form, die Größe, die Struktur, die Menge und die Gruppierung benutzte. Eine bestimmte physiologische Bedeutung schrieb jedoch Nißl den auf diese Weise ausgeschiedenen Kernen damals noch nicht zu. Als Hilfsprinzip wurde das Prinzip Nißls auch von von Monakow (43) bei seinen Untersuchungen über den Bau des Thalamus des Menschen und der Karnivoren verwertet. Andere Autoren, selbst die, die nach dem Nißlschen Verfahren die Kerne des Thalamus untersuchten, versäumen es leider die Grundsätze, nach denen sie die Kerne differenzieren, anzugeben.

Jacobsohn (28) kam, nachdem er auf den nach Nißlschem Verfahren gefärbten Schnitten die Kerne des Zentralnervensystems des Menschen

einer Untersuchung unterworfen hatte, zu der Überzeugung, daß für die Abgrenzung der Zellen in einzelne Kerne die Struktur, wie sie die Nißlsche Methode enthüllt, als wichtigstes Leitmerkmal angesehen werden muß, weil wenigstens die beiden Haupttypen der Nervenzellen, die motorischen und sensiblen, ihrer Struktur nach so verschieden sind, daß sie niemals miteinander verwechselt werden können. Aber auch die anderen Merkmale, wie die Form, die Größe, der Gruppierungscharakter, behalten bei Jacobsohn eine gewisse Bedeutung, wenngleich sie bei ihm erst in zweiter Linie in Betracht kommen. Seine Grundanschauung über das Verhältnis zwischen Struktur und Funktion der Zelle formuliert Jacobsohn folgendermaßen: »Je mehr sich der Nervenstrom von der sensiblen Anfangsstation des Zentralnervensystems der motorischen Endstation desselben nähert, um so mehr verwandelt sich die Struktur des Protoplasmas der zu passierenden Nervenzellen aus einer feinkörnigen in eine grobschollige.«

Auf diese Weise ergab sich die Möglichkeit, von der Struktur der Zelle wenigstens vermutungsweise auf ihre primäre Funktion zurückzuschließen. Das Verfahren Nißls, das von seinem Erfinder zur Differenzierung des Graues zunächst als rein anatomisches verwendet wurde, bekommt später bei ihm und bei Jacobsohn einen anatomo-physiologischen Charakter. Mit Benutzung dieses Nißl-Jacobsohnschen Prinzips hat Hrn. Jacobsohns Schüler, Hr. Dr. Malone (37), den Versuch unternommen, die Kerne des menschlichen Diencephalon zu differenzieren; die vorliegende Arbeit stellt sich als unmittelbare Fortsetzung und Ergänzung jener Untersuchung dar.

Unter einem primären Kern wird somit eine in einem begrenzten Gebiete gelegene und gleichartige Elemente aufweisende Zellengruppe zu verstehen sein. Die Gleichartigkeit der Zellen eines Kernes wird hauptsächlich durch die Gleichartigkeit ihrer Struktur bestimmt, selbst wenn geringe Abweichungen in Form und Größe vorliegen. Sehen wir in dem verschiedenen Zellencharakter nicht etwas Zufälliges, sondern nehmen wir einen Zusammenhang zwischen Struktur und Funktion an, so ist es klar, daß jeder nach diesem Prinzip ausgeschiedene Kern eine einheitliche Funktion besitzen muß.

Je niedriger das Tier steht, desto schwerer ist es, die Kerne des Thalamus voneinander zu unterscheiden. Dies liegt daran, daß die Zellen bei den niedrigen Tieren in bezug auf ihre Struktur, Form und Größe ein-

ander äußerst ähnlich sind. Beim Igel und in geringem Maße beim Kaninchen sind einige Nervenzellen so klein, daß der Unterschied zwischen diesen und Gliazellen fast unmöglich ist. Auch die Pigmentqualität, die zum Teil für die Zellen der verschiedenen Kerne des Thalamus des Menschen charakteristisch ist (Malone), kann beim Studium der Tiere aus dem Grunde nicht verwendet werden, weil in den Zellen ihres Diencephalon das Pigment nicht vorhanden ist.

Ein Moment, mit dem bei allen von mir untersuchten Tieren gerechnet werden muß, ist die Tatsache, daß die Struktur und die Form der Zellen wegen der auf sie drückenden Fasern eine Modifikation erleiden kann. Malone hat besonders diese Tatsache betont. Da, wo die Fasern sich in großen Massen häufen und sich in verschiedenen Richtungen kreuzen, verändern sie die Zellenstruktur bis zur Unkenntlichkeit, so daß ihre Differenzierung dadurch äußerst erschwert wird. Eine zweite Schwierigkeit kann durch die Fasern dadurch bedingt werden, daß sie zuweilen einzelne Zellengruppen von den Kernen absondern. Gelegentlich wachsen diese abgetrennten Gruppen sehr schnell und übersteigen im Umfang die ursprünglichen Kerne, so daß, falls einige verbindende Zellen verschwinden, diese Gruppen das Ansehen selbständiger Kerne erwecken können. Das Studium lückenloser Serien und der nach Weigert-Pal hergestellten Präparate erklärt in einem solchen Falle das neue topographische Bild.

Der Unterschied in der Struktur der Zellen tritt besonders bei mittlerer Vergrößerung (50—180) hervor; diese Vergrößerung benutzte ich bei meiner Arbeit vorzugsweise.

Benutzt man das myeloarchitektonische Prinzip der Differenzierung, so kann man nur, wie es aus der Arbeit von C. Vogt (55) ersichtlich ist und wie die Verfasserin im Anfang sich selbst ausdrückt, auf nach Weigert-Pal gefärbten Schnitten einzelne »Felder« abgrenzen, die durch Fasermenge und -Verlauf charakterisiert sind. Am Schluß der Arbeit werden jedoch diese Felder, wie ich glaube, ohne genügenden Grund, für Kerne oder ihre Äquivalente (? Verf.) ausgegeben. Das parallele Studium der Kerne des Diencephalon auf zahlreichen nach Weigert-Pal-Kulschitzky gefärbten Schnittserien von Tieren, die den Gegenstand meiner Arbeit bilden und die mir in der entgegenkommendsten Weise von Prof. Dr. L. Jacobsohn überlassen wurden, hat mich überzeugt, daß sie für ein Detailstudium der Kerne des Thalamus ganz unbrauchbar sind. Einige Kerne lassen sich auf so

gefärbten Präparaten gar nicht finden, dagegen können einige Zellengruppen, die von den Kernen getrennt sind, als selbständige Kerne imponieren. Ebensowenig sind solche Präparate für das vergleichend-anatomische Studium der Kerne des Diencephalon brauchbar. Wird das vergleichend-anatomische Studium des Thalamus auf den nach Weigert-Pal gefärbten Präparaten betrieben, so sind — und dafür bieten die Untersuchungen von Sachs (50) ein gutes Beispiel — unrichtige Ergebnisse unvermeidlich. Solche Präparate gestatten nämlich nur größere, durch Fasern abgegrenzte Felder zu vergleichen, die nicht immer den Kernen entsprechen. Außerdem werden Kerne, die bei den verschiedenen Tieren dieselbe topographische Lage einnehmen, als homolog angesehen, obgleich sie, wie das Nißlsche Verfahren ergibt, von ganz verschiedenen Zellen gebildet werden.

Der Anwendung der Imprägnationsmethoden (Golgi, Cajal, Bielschowsky und andere) zur Differenzierung des Graues stellen sich zunächst schon die Schwierigkeiten entgegen, die sich bei diesen Methoden an das Anfertigen von Schnitten durch das ganze Diencephalon bei großen Tieren knüpfen. Will man aus der anatomischen Gliederung auch gewisse physiologische Beziehungen ableiten, so können diese Methoden nur von geringem Werte sein, da bei ihnen die Verbindung zwischen der Funktion und dem Strukturbilde noch nicht festgestellt ist. Auch von Monakow glaubte diese Methoden bei seinen experimentell-anatomischen Untersuchungen nicht verwerten zu können.

Meine Untersuchungen habe ich an Frontalserien gemacht. Vom Macacus fertigte ich 5 Serien an (4 lückenlose und eine Ergänzungsserie), 3 vom Hund, 4 vom Kaninchen und 3 vom Igel, die sämtlich lücken los waren.

Die Tiere wurden mit Chloroform getötet. Das sofort herausgenommene Gehirn wurde in 96prozentigem, dann in absolutem Alkohol fixiert und gehärtet und schließlich mittels Chloroform in Paraffin eingebettet. Die 20 $\mu$ dicken Schnitte wurden mit Toluidinblau Dr. Grüblers gefärbt und in Alkohol differenziert.

Bei der Beschreibung einzelner Kerne ist es notwendig, auf ihre topographischen Verhältnisse hinzuweisen. Bei der Kleinheit des Objektes bei niederen Tieren hängen diese Verhältnisse natürlich sehr eng mit der Schnittrichtung zusammen, und schon die geringste Änderung derselben kann auch andere topographische Verhältnisse ergeben.

Die Darstellung geht vom Igel in aufsteigender Richtung zum Affen und hält sich an die gewöhnliche Abgrenzung des Diencephalon (Thalamus, Epi-, Meta-, Hypothalamus). Die Beschreibung erfolgt von kaudal nach oral zu. Diese Richtung ist als die führende im Auge zu behalten.

Bei der Nomenklatur habe ich nach dem Beispiel Gansers (23) die Bezeichnungen Corpus geniculatum laterale und mediale bei allen Tieren beibehalten, obgleich, wie schon Forel (20) nachgewiesen hat, das erste bei den kleinen Säugetieren oral und dorsal und das zweite kaudal und ventral gelegen ist. In der Bezeichnung einzelner Kerne bin ich im allgemeinen Malone (37) gefolgt, dessen Nomenklatur ich für die zweckmäßigste halte.

Die gröberen äußeren Verhältnisse des Thalamus und Metathalamus setze ich als bekannt voraus. Zur Orientierung in diesen habe ich die erste Arbeit von Forel (20) und das Lehrbuch Flatau und Jacobsohn (19) benutzt.

## Igel (*Erinaceus europaeus*. Ordnung: *Insectivora*).

### Metathalamus.

Die ersten Zellen des Nucleus corporis geniculati medialis (n. c. g. med.) beginnen in Gestalt eines Höckers ungefähr in der Mitte der lateralen Seite des vorderen Zweihügels aufzutreten. Dieser Kern vergrößert sich schnell, breitet sich schon nach 6—7 Präparaten kontinuierlich in die Substanz des Zweihügels und erstreckt sich wie ein mächtiger Polyp zur Peripherie. Die Zellen dieses Kerns sind rund oder polygonal, arm an chromatophiler Substanz und lassen sich darum schwach färben. Die größte Entwicklung erreicht der Kern nach dem Verschwinden der Oculomotoriuszellen; er verbreitert sich dann dorsal, nimmt die ganze laterale und teilweise auch die dorsale Partie des Präparats ein (Fig. 1 und 5). Bald nach Erscheinen des Ganglion habenulae beginnen die Grenzen des N. c. g. med. sich zu verwischen, und der Kern, medialwärts gedrängt durch den hervortretenden Kern des äußeren Kniehöckers (n. c. g. lat.), verschwindet rasch. Einzelne Zellen von ihm kann man noch oral zwischen dem N. c. g. lat. und dem Nucleus communis thalami (n. cs. th.) verfolgen (Fig. 9).

Der Nucleus corporis geniculati lateralis (n. c. g. lat.) beginnt oral und dorso-lateral von dem eben beschriebenen Kerne (Fig. 5 links).

Seine runden Zellen färben sich stark und haben einen großen Kern, der in der Mitte liegt. Der N. c. g. lat. erscheint im Vergleich zum N. c. g. med. schwach entwickelt und hat die Form einer kleinen, aber gut abgegrenzten Mandel (Fig. 9). Auf mehr oral gelegenen Schnitten verschwinden die medial gelagerten Zellen, und jetzt stellt sich der N. c. g. lat. als ein schmaler Streifen von Zellen dar, der in der dorso-lateralen Ecke des Präparats gelagert ist (Fig. 13). Auf der Stufe der größten Entwicklung dieses Kerns tritt ventral von ihm ein kleiner Zellenhaufen in der Form eines Dreiecks hervor. Die Basis dieses Dreiecks ist nach dem N. c. g. lat., seine Spitze ventral gerichtet (g. v. c. g. lat. Fig. 9 rechts und Fig. 13 rechts). Diese Gruppe scheint ein Anhängsel des N. c. g. lat. zu sein. Zwischen den gliösen Elementen finden sich in dieser Gruppe dreieckige Nervenzellen, die bedeutend kleiner sind als die des N. c. g. lat. Ich bezeichne diese Gruppe als Griseum ventrale c. gen. lateralis. Auf die Frage nach ihrer Bedeutung werde ich im vergleichend-anatomischen Teile der Arbeit zurückkommen.

Literatur. Forel (20) hat als erster auf die Größe des C. gen. med. bei niederen Tieren, insbesondere beim Maulwurfe, hingewiesen. Dies wurde von Ganser (23) bestätigt. Der N. c. g. med. ist bei der Blindmaus enorm groß (von Frankl-Hochwart [22]). Nach Ziehen (57) ist das C. g. med. bei Echydna nicht an der Peripherie gelegen, sondern medial vom C. g. lat.

Bei dem Maulwurf hat Ganser (23) gefunden, daß »die beiden Kniehöcker weder vom Sehhügel noch voneinander getrennt sind«, nur in seinem kaudalen Abschnitte ist der Kern des medialen Kniehöckers gut abgegrenzt. Edinger (14) bemerkt, daß das C. g. lat. bei der Blindmaus fehlt, und beruft sich auf von Frankl-Hochwart. von Frankl-Hochwart (22)[1] spricht nur vom Fehlen im makroskopischen Sinne, mikroskopisch wurde von ihm das Vorhandensein eines allerdings rudimentären C. g. lat. bei der Blindmaus festgestellt. Ziehen (57) unterscheidet bei Marsupialien und Monotremen ein C. gen. lat. dorsale und ein ventrale. Beide Kniehöcker des Igels sind gut auf Fig. 10 abgebildet, die der Arbeit Bischoffs (7) beigelegt ist.

## Epithalamus.

In der Zirbeldrüse habe ich bei keinem der von mir untersuchten Tiere Nervenzellen gefunden.

Im Ganglion habenulae des Igels wie auch bei den anderen untersuchten Tieren sind zwei Kerne leicht zu unterscheiden: der Nucl. medialis

[1] Bekanntlich gehört die Blindmaus zu der Ordnung Rodentia. Ich zitiere jedoch die Angaben über die Kerne dieses Tieres bei der Beschreibung des Igels aus dem Grunde, weil der Vergleich dieser Tiere mit rudimentären bzw. fehlenden Augen mir zweckmäßig zu sein scheint.

und der Nucl. lateralis. Während die Zellen des lateralen einen ausgesprochen nervösen Charakter haben, sind die Zellen des ersten nur schwer von den Glia- bzw. Ependymzellen des 3. Ventrikels zu unterscheiden. Es ist bekannt, daß Forel (21) und Nißl (48) sich für den nervösen Charakter dieser Zellen ausgesprochen haben. Auf Grund sorgfältigen Studiums dieser Zellen auf Schnitten, die nach Nißl und nach Golgi gefärbt waren, kam auch Ramonj Cajal zu derselben Meinung. In der französischen Übersetzung des Cajalschen Lehrbuchs (11) sind die Zellen der beiden Kerne des Ganglion habenulae sehr gut abgebildet (Fig. 271 und 273).

Der Nucl. medialis (n m g h) übersteigt an Größe und Ausdehnung bedeutend den N. lateralis (n l g h). Er beginnt in Gestalt eines kugelförmigen Häufchens, das sich unmittelbar an die Wand des 3. Ventrikels anlegt (Fig. 9). Er vergrößert sich sodann rapid in dorsaler und besonders in latero-ventraler Richtung. Auf seiner höchsten Entwicklungsstufe umfaßt er den lateralen Kern des Ganglion habenulae von der medialen, ventralen und dorsalen Seite (Fig. 9 rechts und Fig. 13 links). Seine Verkleinerung geschieht auf Kosten der latero-ventralen Zunge. Der Rest wird von dem Nucl. medianus (s. unten) nach dem dorsalen Rand gedrängt (Fig. 17). Von diesem Rest trennt sich eine kleine Zellengruppe ab, die sich lateral von ihm ablagert (Fig. 17 links und Fig. 21).

Die charakteristischen Eigenschaften der Zellen des N. medialis sind: ihre geringe Größe, runde Form, dichte Häufung und eine derart starke Färbung, daß der ganze Kern mit unbewaffnetem Auge zu erkennen und zu verfolgen ist. Um zu ersehen, wie große Ausdehnung der N. med. beim Igel hat, genügt es darauf hinzuweisen, daß von 196 Präparaten, in die eine meiner Serien zerlegt ist, 138 diesen Kern aufweisen.

Die Zellen des Nucl. lateralis sind zum größten Teil dreieckig, locker gelagert, mit gut hervortretenden Fortsätzen; sie lassen sich schwach färben.

Literatur. Stieda (52) hat als erster das Ganglion habenulae bei der Maus abgeschieden. Der Name stammt jedoch erst von Meynert (39). Was alle Verfasser bis Nißl (46), der das Gangl. hab. in zwei Kerne geteilt hat, für das Gangl. hab. ausgeben, ist nur sein medialer Kern. Meynert (39) und Forel (21) haben auf die große Entwicklung des Gangl. hab. bei niederen Tieren hingewiesen. Edinger (14) zeigte, daß es bei keinem Tiere fehlt, bei Myxine sogar enorm groß ist. Meynert (39) und Ganser (23) glaubten, daß das Ganglion aus bindegewebigen Zellen besteht und daß die Zirbel die unmittelbare Fortsetzung bilde. — Schon Ganser (23) hat betont, daß die lateral vom Gangl. hab. gelagerten Zellen ihrer Struktur wegen abgesondert werden müssen. Bei der Blindmaus ist

das Gangl. hab. sehr groß (von Frankl-Hochwart [22]). Edinger (14) unterscheidet schon bei Myxine, wie auch bei den Vögeln, in dem Gangl. hab. ein laterales und mediales Ganglion.

In der Zirbeldrüse sind nach Cajal (10) außer Drüsenzellen auch eigenartige Nervenzellen vorhanden, deren Natur noch nicht klar ist und die er seinen Interstitialdrüsenzellen analogisiert (Cellulae sympathicae interstitiales Cajal).

## Thalamus.

Der Beschreibung der Kerne des Thalamus will ich eine Bemerkung vorausschicken, die sich auf alle von mir untersuchten Tiere bezieht.

Ein Teil des Thalamusgraues besteht aus Zellen, die man ihrer verschiedenen Struktur wegen in besondere Kerne gruppieren kann. Den anderen Teil bilden nach Struktur, Form und Gruppierungscharakter gleichartige Zellen. Was die Größe anbetrifft, so ist sie bei niederen Tieren konstant, bei den höheren in engen Grenzen schwankend. In diesem Falle bestehen aber in bezug auf die Größe fließende Übergänge. Im allgemeinen ist der Unterschied in den Zellen dieses Teiles nicht so bedeutend, daß man ihn zur Differenzierung verwenden könnte. Diesen zweiten Teil des Thalamusgraues werden wir daher als einen Kern zu betrachten haben, der bald diese, bald jene rein topographische Einteilung zuläßt.

Da die von Malone (37) für den entsprechenden Kern des Menschen vorgeschlagene Bezeichnung — Nucleus communis — schon durch den Namen auf die ziemliche Gleichartigkeit der ihn zusammensetzenden Zellen hindeutet, so werden auch wir sie verwenden.

An der Grenze zwischen vorderem Zweihügel und Thalamus inmitten im Grau des ersten bemerkt man einen Kern (n pr bgm Fig. 1), der mehr oral unmittelbar in den Thalamus übergeht (Fig. 5), den Nucl. praebigeminalis (Cajal). Anfangs grenzt dieser Kern lateral an den N. c. g. med., dorsal und medial an die graue Substanz des vorderen Zweihügels, seine ventrale Grenze ist nicht scharf. Daß der Nucl. praebigeminalis ein selbständiger Kern ist, erhellt daraus, daß 1. seine Zellen bedeutend kleiner als die des Zweihügelgraues sind, daß 2. die großen im Grau des vorderen Zweihügels vorhandenen und den von Tartuferi und Jacobsohn (28) beschriebenen motorischen Zellen des Nucl. motorius corporis bigemini anterioris entsprechenden Zellen in diesem Kern nicht vorhanden sind und 3. seine topographische Begrenzung nicht durch Faser-

massen bedingt ist, wie dies aus den nach Weigert-Pal gefärbten Schnitten ersichtlich ist. Der Kern hat bei dem Igel eine mehr oder wenig runde Form; er wird mit der stärksten Entwicklung des Nucl. communis (s. unten) dorsalwärts zurückgedrängt (Fig. 9 links) und verschwindet im Niveau der besten Entwicklung des Corp. gen. lat. (Fig. 9 rechts).

Mit dem allmählichen Verschwinden des Nucl. c. g. med. erscheinen medial von ihm die ersten Zellen des Nucl. communis (n csth). Auf jeden Fall ist dieser Kern anfangs vom Nucl. c. gen. med. nicht scharf abgegrenzt (Fig. 5). Der Nucl. communis nimmt rapide an Umfang zu. In seinem kaudalen Abschnitt grenzt er ventral an den Nucl. peripeduncularis lateralis (n p pe l), dorsal an den Nucl. praebigem., lateral an den Nucl. c. gen. medial. und medial an das Zweihügelgrau (Fig. 9). Diesen Teil kann man als ventralen bezeichnen (n csth ventr.). Von ihm trennen sich Zellen ab, die linear dorsalwärts verlaufen und hier den dorso-lateralen Teil des Nucl. communis bilden (n csth drlt Fig. 9 und Fig. 13). In seiner vollkommensten Entwicklung bildet der Kern ein Dreieck, dessen mediale Spitze sich der Mittellinie nähert, ohne jedoch die Spitze des Kerns der anderen Seite zu berühren (Fig. 13). Wenn der Nucl. c. gen. lat. schwindet, wird sein Areal durch die Pars dorso-lateralis des Nucl. communis eingenommen (Fig. 17 rechts). Wenn im oralen Drittel des Thalamus die Zellen der Pars ventralis sich schon mit denjenigen des Griseum subthalamicum (grsbth s. unten) vermischen, ist der dorsale Teil noch gut abgegrenzt (Fig. 21). Er ist mithin der oralste Teil des Nucl. communis. — Die Zellen des eben beschriebenen Kerns sind rund oder birnenförmig, sie enthalten wenig chromatophile Substanz und lassen sich darum nur schwach färben. — Die graue Substanz der äußeren Gitterschicht bildet sich sowohl auf Kosten der lateral gelagerten Zellen des Nucl. communis, wie auch derjenigen des Griseum subthalamicum, die von der basalen Seite hier eindringen. Außer diesen finden sich aber in oralen Schnitten auch größere Elemente (Fig. 21 z g 25). Weil sie keine klare topographisch abgegrenzte Gruppe bilden, kann ich sie nicht als einen besonderen Kern auffassen.

Fast gleichzeitig mit dem Ganglion habenulae erscheinen ventral von ihm auf beiden Seiten der Mittellinie kleine dreieckige und längliche blasse Zellen. Sie nehmen an Zahl rasch zu, schmiegen sich eng aneinander und bilden zwei symmetrisch gelagerte Säulen, die sich ventralwärts ziehen (n mdn Fig. 9). Sehr schnell verschmelzen beide Nucl. mediani, wie ich

diese Säule benenne[1], und bilden einen breiten Streifen, der in der Mitte der Commissura media liegt (Fig. 13, 17 und 21). Die Beziehungen, die zwischen dem ventralen Teile des Nucl. medianus und anderen Kernen des Thalamus existieren, werde ich noch später berühren.

Lateral von dem Nucl. medianus lagert sich der Nucl. paramedianus (n prmdn Fig. 9, 13, 17, 21). Er besteht aus einer kleinen Anzahl großer, viereckiger, locker gelagerter Zellen. Auf der Stufe seiner größten Entwicklung erscheint er als ein großer, rundlicher Kern, der in medialer Richtung an den Nucl. medianus, in dorsaler an das Ganglion haben., ventral und lateral an den Nucl. reuniens (s. unten) grenzt. Auf oralen Schnitten nimmt der Nucl. paramed. die dorsale Partie des Thalamus ein (Fig. 21); er beginnt hier auf Kosten seiner medialen Zellen, deren Stelle der Nucl. medianus einnimmt, an Größe abzunehmen. Durch den Nucl. medianus lateralwärts gedrängt, läßt er sich bis zum Schluß der Serie verfolgen (Fig. 25). Dieser Kern ist dadurch charakterisiert, daß er arm an Zellen ist, während die anderen Kerne des Igel-Thalamus aus einer großen Menge von Zellen bestehen.

Zwischen dem Nucl. communis und dem Nucl. paramediamus lagern sich blasse, kleine und eng aneinanderliegende Zellen des Nucl. reuniens (n rn th). Anfänglich ist ihre Zahl schwankend, und der Kern stellt sich bald als ein kompakter Zellenzug, bald in Gestalt einzelner Inseln dar (Fig. 13). Auf mehr oralen Schnitten wächst der Nucl. reuniens sowohl in dorsaler wie auch in medialer Richtung. Er zieht sich durch die Commissura media und verschmilzt mit dem entsprechenden Kern der entgegengesetzten Seite, bildet also einen Kreisbogen, der den Thalamus in zwei Teile trennt (Fig. 17 und 21). Vergleicht man die nach Nißlschem Verfahren gefärbten Präparate mit den nach Weigert-Pal gefärbten, so ersieht man, daß der Bogen des Nucl. reuniens der inneren Gitterschicht entspricht. Es wäre jedoch ein Irrtum, wollte man annehmen, daß der Nucl. reuniens einen zwischen den Fasern der Gitterschicht gelegenen Teil des Nucl. communis bildet. In bezug auf die Struktur unterscheiden sich nämlich die Zellen des Nucl. reuniens so stark von denjenigen des Nucl. communis, daß es unumgänglich erscheint, den Nucl. reuniens als einen

[1] Es ist freilich nichts gegen die Benennung »Kern der Mittellinie« einzuwenden, die Nißl diesem Kern gibt. Wenn ich sie dennoch durch den Namen »Nucleus medianus« ersetze, so geschieht es nur deshalb, weil es zweckmäßiger ist, alle Namen lateinisch wiederzugeben.

ganz selbständigen Kern zu betrachten. Beim Affen (s. unten) und beim Menschen (Malone) lagert sich ein großer Teil des Nucl. reuniens außerhalb der Gitterschicht. Einzelne Zellenreihen des Nucl. reuniens ziehen sich dorsalwärts zur Peripherie, ohne sie jedoch zu erreichen. In den oralsten Schnitten zerfällt der Kern allmählich in eine Mehrzahl einzelner Inseln, die man fast bis zum Schluß der Serie verfolgen kann. In der Commissura media kreuzt sich der Nucl. reuniens mit dem Nucl. medianus. Die Zellen beider Kerne mischen sich sowohl untereinander wie auch mit den Zellen des Graues des 3. Ventrikels und bilden gerade im Zentrum der Commissura einen Knäuel dicht aneinander gelagerter Zellen (Fig. 21).

Literatur. Ganser (23) unterscheidet im Thalamus des Maulwurfs 4 Kerne: den lateralen, vorderen, medialen und hinteren. Die Gitterschicht besteht beim Maulwurf nach diesem Verfasser aus Zellen der Thalamuskerne. Nach Auerbach (2) zeichnet sich der Thalamus bei Monotremen durch Einfachheit des Baues aus und soll nur aus 3 Kernen bestehen. Die Untersuchungen Ziehens (57) über den Thalamus der Monotremen und Marsupialier führten ihn zu ganz entgegengesetzten Ergebnissen. Auch bei diesen Tieren ist der Thalamus sehr kompliziert gebaut. Ziehen (58) schildert in der Commissura media des Ornithorhynchus eine graue Masse, die knopfartig hervortritt. Ich habe darauf verzichtet, meine Ergebnisse über die Kerne des Igels mit denen bei Monotremen und Marsupialien zu vergleichen, denn bei dem Fehlen nach Nißlschem Verfahren angestellten Untersuchungen über die Thalamuskerne bei Monotremen und Marsupialien scheint mir die Möglichkeit einer solchen Homologisierung sehr zweifelhaft. Sachs (50) unterscheidet beim Igel einen Täniakern, außerdem schildert er noch Nucl. dorsales disseminati Obersteiners. Der erste entspricht meiner Ansicht nach dem abgetrennten Teil des Nucl. medialis des Gangl. hab. In dem frontalen Ende der Commissura media hat Sachs einen besonderen Kern gesehen. Bei den Insektivoren soll nach Sachs auch der Nucl. dorsalis magnus gut ausgebildet sein. Unter diesem Namen beschreibt Sachs einen Kern, der bei sämtlichen 34 von ihm untersuchten Tieren, angefangen von den Marsupialien bis zum Menschen, vorhanden sein soll. Obgleich es sich bei mir nur um 4 Tiere handelt, habe ich den in dorsalem Gebiete gelegenen und angeblich ja bei allen Tieren vorhandenen Kern nicht auffinden können. Ich glaube, daß Sachs unter diesem Namen wenigstens 3 gänzlich verschiedene Kerne beschrieben hat. — Der Name »Nucleus reuniens« stammt von Edinger (14); ausführlicher darüber s. den vergleichend-anatomischen Teil.

## Substantia grisea des dritten Ventrikels.

Das Ventrale Grau des 3. Ventrikels (sgv) ist in dem oralen Teil des vorderen Zweihügels gut abgegrenzt (Fig. 9) und besteht aus einer Anzahl kleiner dreieckiger und birnenförmiger Zellen, die sich nur schwach färben lassen. Die Unterscheidung zwischen den Zellen des Griseum centr. und den Gliazellen ist nicht immer möglich. In dem ventralen Teil des Griseum

centr. liegen verhältnismäßig große viereckige Zellen, die zum Nucl. commissurae posterioris (Darkschewitscher Kern) gehören. Er ist beim Igel gut entwickelt. Lateralwärts von dem Ventralen Grau lagert sich ein kleines Säulchen, das aus einer großen Anzahl kleiner, wahrscheinlich durch die Fasern gedrängten Zellen des Höhlengraues besteht (Fig. 5). Diese Gruppe ist durch intensive Färbung leicht zu erkennen. Aus den Figuren 13, 17, 21 und 25 ist es zu ersehen, daß das zentrale Grau des unteren Teils des 3. Ventrikels die untere Etage der Commissura media bildet.

Literatur. Meynert (39) und Forel (20) haben darauf aufmerksam gemacht, daß das Zentrale Grau, obgleich es unmittelbar in die graue Masse des Thalamus übergeht, dennoch mit ihr nichts gemein hat. Forel (20 und 21) hat die große Anzahl der Zellen im Griseum ventriculare hervorgehoben und auf die Schwierigkeit der Unterscheidung von »bindegewebigen« Elementen hingewiesen. Die verschiedene Form der Zellen des Zentralen Graues beim Maulwurf ist vortrefflich von Ganser (23) beschrieben worden.

## Hypothalamus.

Die zwei sogleich zu beschreibenden Kerne gehören eigentlich zum Mesencephalon. Ich werde sie jedoch aus dem Grunde zu berühren haben, weil sie oralwärts sich in das Diencephalongebiet erstrecken.

Die Substantia nigra Soemmeringii (Nucl. pigmentosus subthalamo-peduncularis Jacobsohn) setzt sich aus kleinen dreieckigen Zellen zusammen, die in der medialen Seite in größerer Zahl gehäuft sind (sn Fig. 1). Einzelne Zellen lagern sich ventral von der Substantia nigra zwischen den Fasern des Fußes (sn, Fig. 1 und Fig. 5). Gelegentlich sammeln sie sich in kleinere oder größere Gruppen. Ob sie einen selbständigen Kern bilden oder ob sie zur Substantia nigra gehören, läßt sich auf Grund rein morphologischer Untersuchungen nicht feststellen. Die Frage könnte nur auf experimentellem Wege gelöst werden.

Zwischen der Substantia nigra und dem Nucl. c. gen. med. tritt eine schmale, topographisch gut abgegrenzte Gruppe hervor, die sich aus länglichen, blassen, dichten Zellen zusammensetzt (n p pel Fig. 1 und 5). Dieser Kern entspricht wohl dem Nucl. peripeduncularis lateralis des Menschen, wie er von Jacobsohn (28) beschrieben worden ist. Im Niveau, in dem der Nucl. corp. gen. med. zu verschwinden beginnt, biegt sich der Nucl. peripeduncularis lateralis dorsalwärts um (Fig. 9 links). Seine Spitze berührt das Ventrale Grau des Corp. gen. lat. (Fig. 9 rechts und Fig. 13).

Der Nucl. perip. lat. setzt sich in oraler Richtung weiter fort und läßt sich bis zur äußeren Gitterschicht verfolgen.

Nach dem vollständigen Verschwinden der Substantia nigra erscheint der Nucl. hypothalamicus (Corpus Luysii). Seine Zellen sind klein, dreieckig und lassen sich schwach färben. Der Kern stellt einen ziemlich flachen Zellenhaufen dar, der an seiner dorsalen Seite ohne scharfe Grenze in das Griseum subthalamicum (s. unten) übergeht. Auf der Fig. 13 habe ich ihn (n hpth) absichtlich etwas schärfer, als er in Wirklichkeit abgegrenzt ist, abgebildet.

Unter dem Namen Griseum subthalamicum (gr sbth) fasse ich diejenigen Zellen zusammen, die sich zerstreut in folgendem Dreieck vorfinden (gr sb th Fig. 9, 13, 17). Die Basis dieses Dreiecks wird durch das zentrale Höhlengrau gebildet, seine Seiten durch die Substantia nigra bzw. den Nucl. hypothalamicus und die Pars ventralis Nucl. communis. Die verschiedene Größe der Zellen des Griseum subthalamicum und die durch die hier in allen Richtungen sich kreuzenden Fasern bedingte Variabilität ihrer Form macht es unmöglich, diese Zellen in besondere Kerne einzuteilen. Ich möchte nur betonen, daß im kaudalen Teile des Griseum subthalamicum, und zwar medial, einige große Zellen vorhanden sind. Sie sind größer als die großen Zellen des Nucl. ruber (Nucleus rotundus subthalamo-peduncularis Jacobsohn), lassen sich intensiv färben und haben drei bis vier Fortsätze. Wie Jacobsohn (29) gezeigt hat und wie meine Untersuchungen bestätigen, müssen wir solche Zellen den motorischen Zellen des Menschen und höherer Tiere für entsprechend halten.

Das Corpus mamillare besteht beim Igel aus zwei Kugeln, die in ihrem kaudalen Teile durch eine Furche getrennt sind; oralwärts fließen sie zusammen.

Jedes dieser Kügelchen besteht aus zwei deutlichen Kernen — dem medialen und dem lateralen (Fig. 9). Die Zellen des lateralen Kerns (n l c mam) sind nicht zahlreich, dreieckig und lassen sich intensiv färben. Sie sind größer als die Zellen des Nucl. medialis (n m c mam). Letztere sind rund, klein, zahlreich und arm an chromatophilen Substanzen. Im Nucl. medialis sind viele gliöse Elemente vorhanden, deren Unterscheidung von den Nervenzellen nicht immer leicht ist.

An der dorsalen und dorso-lateralen Seite sind die Nucl. mediales von der grauen Masse umhüllt. Diese besteht aus zahlreichen runden Zellen, die ihrer Größe nach zwischen den Zellen des Nucl. medialis und denen

des Nucl. lateralis c. mam. stehen. Für diesen gut abgegrenzten Zellenhaufen schlage ich den Namen Nucl. supramamillaris (n sp mam) vor (Fig. 9). Dieser Kern verschmilzt mit dem gleichnamigen Kern der entgegengesetzten Seite. Im oralen Teil der Corp. mamill. drängt sich der eben beschriebene Kern zwischen die beiden medialen Kerne hinein. Die Nucl. mediales gehen ohne scharfe Grenze in das Grau des Tuber über. Am oralsten erstreckt sich der Nucl. lateralis. Auf den kaudalen Schnitten lateral vom Nucl. medialis gelegen, umfaßt der Nucl. lateralis auf den oralen Schnitten den medialen Kern teilweise auch von der ventralen Seite.

Literatur. Die ventral von der Substantia nigra gelegenen Zellen hat Ganser (23) als Nucl. infrapeduncularis bezeichnet. Diese Zellen bei den Monotremen schildert Ziehen (57) als Substantia reticularis medialis pedis. Die lateral von der Substantia nigra gelagerten Zellen bezeichnet Ziehen (57) als Pedamentum laterale. — Forel (21) glaubte, daß der Nucl. hypothalamicus nur beim Menschen und Affen gut abgegrenzt, bei den anderen Tieren aber durch einen ziemlich undeutlichen Zellenhaufen markiert sein sollte. Im Gegensatz zu Forel (21) haben aber Ganser (23), Kölliker (31) und Cajal (11) gezeigt, daß dieser Kern bei ganz kleinen Tieren — dem Maulwurf, der Maus, dem Meerschweinchen — gute Umrisse hat. Sano (51) schildert den Nucl. hypothal. des Igels in derselben Weise wie ich. Ziehen (57) hat ihn auch bei Echydna und Marsupialien gesehen.

Daß die in der Substantia innominata bzw. Zona incerta Forels gelegene graue Masse keine scharfe Grenze besitzt, hat schon Forel (21) selbst und Ganser (23) ausgesprochen. Cajal (11) faßt die hier gelegenen Zellen als Nucleus zonae incertae zusammen. von Bechterew (3) grenzt die Zellen, die zwischen der Sub. nigra und dem Nucl. ruber liegen, als einen besonderen Kern — Nucl. pedunculi transversi — ab, ohne allerdings anzugeben, bei welchem Tiere. Wie Sano (51) war es auch mir unmöglich, Merkmale zu finden auf Grund deren diese Zellen ausgeschieden werden könnten. Sano (51) beschreibt beim Igel eine dorsal vom lateralen Pol des Fußes und ventral von C. g. med. gelegene graue Masse, die in das ventrale Grau des C. gen. med. übergeht. Er rechnet sie zur Sub. nigra, während es sich meiner Ansicht nach um den Nucl. peripeduncul. later. handelt.

Nach unseren obigen Ausführungen läßt sich die graue Substanz des Diencephalon des Igels in folgende Kerne zerlegen:

Metathalamus.

Nucl. corporis gen. medialis.
Nucl. corporis gen. lateralis.
Griseum ventrale corp. gen. lateralis.

Epithalamus.

Nucl. medialis des Ganglion habenulae.
Nucl. lateralis des Ganglion habenulae.

Thalamus.

Nucl. praebigeminalis.
Nucl. communis { pars dorso-lateralis. / pars ventralis.
Nucl. medianus.
Nucl. paramedianus.
Nucl. reuniens.

Substantia grisea des 3. Ventrikels.

Hypothalamus.

Nucl. hypothalamicus.
Griseum subthalamicum.
Nucl. medialis corp. mamillaris.
Nucl. lateralis corp. mamillaris.
Nucl. supramamillaris.

Kaninchen (*Lepus cuniculus*. Ordnung: *Rodentia*).

Metathalamus.

Sehr kaudal im Niveau des Hervortretens des Nucl. ruber neben der lateralen Furche, die den vorderen Teil des vorderen Zweihügels von dem mittleren trennt, erscheinen einige sich intensiv färbende polygonale Zellen (Fig. 2 rechts). Sie haben ein feinkörniges Protoplasma, einen großen Kern und deutliche Fortsätze. Diese Zellen wachsen rasch an Zahl und bilden den Nucl. supragenicul atus (n spr gn), der wie ein Deckel über dem hervortretenden C. gen. med. liegt. Von diesem Kern trennen sich in zwei meiner Serien einige Zellen ab, die sich etwas mehr dorsal vom Nucl. supragenicul atus lagern. Der ganze Kern weist nur eine geringe Ausdehnung auf: er läßt sich auf 30—35 Präparaten verfolgen.

Das Corp. gen. med. ist beim Kaninchen gut entwickelt und besteht aus zwei deutlich voneinander abgrenzbaren Kernen. Der Nucl. dorsalis (n d c g m) setzt sich aus einer kleinen Anzahl großer drei- und viereckiger, schwach sich färbender und locker gelagerter Zellen zusammen (Fig. 2 links). Der etwas mehr oral liegende Nucl. ventralis (n v c g m) besteht aus einer großen Zahl kleiner, runder, sich dicht aneinander anschmiegender Zellen.

Anfangs (Fig. 2) nimmt der ventrale Kern einen größeren Raum als der dorsale Kern ein. Während die Zellen des letzteren ihrer Form und ihrer Lagerung nach konstant bleiben, ist die Form der Zellen des ventralen Kerns variabel. So erscheinen sie an der Peripherie als kleine, an der medialen Seite dagegen als verhältnismäßig große Zellen und lagern sich hier gürtelförmig. Auf der Grenze gegen den dorsalen Kern bilden sie einen besonders deutlichen Zug. Da wo die ersten Zellen des Nucl. corp. gen. lat. auftreten, beginnt der dorsale Kern, der zunächst beinahe wagerecht gelagert ist, sich schnell dorsalwärts zu verbreiten, und die beiden Kerne des Corp. gen. med. bilden jetzt zusammen eine konusartige Figur, deren Basis der Nucl. ventralis ist (Fig. 6 links). Sobald das Corp. gen. lat. deutliche Umrisse zeigt, fängt der dorsale Kern an, sich zu verlieren, und der Rest seiner Zellen, die sich jetzt mit denen des Nucl. ventralis mischen, läßt sich zwischen dem Nucl. corp. gen. lat. und dem ventralen Teil des Nucl. communis verfolgen (Fig. 10 links).

Der Nucleus corp. gen. lateralis (n c g lat) beginnt mehr oral als die Kerne des medialen Kniehöckers und ist wie von den letzteren so auch von dem Nucl. communis gut abgegrenzt. Seine ersten Zellen liegen im dorso-lateralen Winkel des Präparats (Fig. 6), von hier aus verbreiten sie sich ventralwärts und bilden einen mächtigen Kern, der die ganze laterale Peripherie einnimmt (Fig. 10). Von seiner medialen Seite zweigen die Fasern einen langen Zellenzug ab, der sich basalwärts zieht (Fig. 10). Im Niveau der größten Entwicklung des Nucl. c. g. lat. verschwindet der mediale Zug, und ventro-medial von dem Hauptkern lagern sich die Zellen, die ich unter dem Namen »Ventrales Grau des Corp. gen. lat.« (v g c g lat. (Fig. 10 und 14) zusammenfasse. Topographisch ist das letztere gut abgegrenzt. Es liegt etwas schief und hat die Form einer kleinen Mandel. Der untere Pol des Ventralen Graues liegt dem Pedunculus sehr nahe, dorsalwärts geht es in den Nucl. c. g. lat. über. Die runden Zellen des Ventralen Graues sind kleiner als die des Nucl. c. gen. lat. und lassen sich schwach färben. Auch beim Kaninchen sind in diesem Grau die gliösen Elemente in großer Zahl vorhanden. In den oralen Schnitten zeigt der Rest des Nucl. c. gen. lat. die Form einer Linse, die in der dorso-lateralen Ecke liegt. Er nimmt daher hier dasselbe Areal ein, das er auch in seinem Anfang einnimmt (Fig. 14). Dieses kleine Areal entspricht dem des ganzen Nucl. c. g. lat. des Igels (Fig. 9 und 13).

Literatur. Der Nucl. suprageniculatus ist schon bei von Gudden (24) (Fig. 7 Taf. XX) und bei Kölliker (Fig. 665) gut abgebildet. Beschrieben wurde er jedoch erst von Münzer und Wiener (45), von denen auch sein Name stammt. von Gudden (24) hat schon die beiden Kerne des medialen Kniehöckers des Kaninchens auf Fig. 7 Taf. 20 abgebildet. Auch die übrigen Autoren unterscheiden im C. gen. med. des Kaninchens zwei Kerne (Kölliker, Cajal, von Monakow, Münzer und Wiener). Nur Nißl (46) wollte im C. gen. med. des Kaninchens eine größere Detaillierung finden; er unterscheidet nämlich in ihm 6 Kerne: einen vorderen und einen hinteren großzelligen, einen ventralen, einen dorsalen, einen medialen und einen hinteren Kern. Cajal (11) verwirft eine derartige Detaillierung; seiner Meinung zufolge können nur zwei Kerne, nämlich die schon von von Gudden hervorgehobenen, nach ihrer Zellenstruktur bestimmt unterschieden werden. In den Zellen der übrigen Nißlschen Kerne hat Cajal (11), wie auch ich, keinen Strukturunterschied gesehen und daher auch keine Möglichkeit gefunden, sie auszuscheiden. Nach Münzer und Wiener (45) soll das C. gen. med. beim Kaninchen wesentlich mächtiger als das C. gen. lat. sein. Dieser Meinung kann ich auf keinen Fall beistimmen. Nach Haller (25) liegen bei der Maus beide Kniehöcker — die er Nuclei optici laterales benennt — so dicht nebeneinander, daß sie wenigstens auf den Horizontalschnitten nicht zu trennen sind.

Die erhebliche Größe des C. gen. lat. beim Kaninchen hat zuerst von Monakow (40) betont. Er unterscheidet in ihm den dorsalen und den ventralen Teil. Aus seiner genaueren Beschreibung ist zu ersehen, daß sein ventraler Teil meinem »Ventralen Grau« entspricht. Die von Monakowsche Einteilung wurde fast von allen Autoren: Kölliker (31), Cajal (11), Berl (5) akzeptiert. Nur Nißl (46) und nach ihm Münzer und Wiener sprechen von 2 ventralen Kernen des C. gen. lat.

## Epithalamus.

Die beiden Kerne des Ganglion habenulae erscheinen fast gleichzeitig (Fig. 6). Der Nucl. med. (n m gh) zieht sich anfangs an dem Rand des 3. Ventrikels entlang, er bildet sodann ein Züngelchen, das sich ventrolateral streckt. Der mediale Kern ist enorm entwickelt und größer als der laterale (n l gh). Die beiden erstrecken sich weit oralwärts (Fig. 10 und 14) und verschwinden fast gleichzeitig. Genau so wie beim Igel besteht der mediale Kern aus einer großen Zahl kleiner runder, dicht aneinandergelegener und intensiv sich färbender Zellen. Der laterale Kern besteht aus wenigen verhältnismäßig großen, locker gelagerten und schwach sich färbenden Elementen. Im ventralen Teil des Nucl. lateralis sind die Zellen größer als im dorsalen.

Literatur. Nißl (46), Cajal (11), Kölliker (31) fanden, daß beim Kaninchen bzw. bei der Maus das Ganglion habenulae in 2 Kerne zerfällt. Haller (25) beschreibt jedoch bei der Maus nur den medialen Kern. Bei diesem Tiere dehnt sich das Gangl. hab. bis zum vorderen Pol des Thalamus aus (Lotheisen [34]). Bianchi (6) hat die Zellen der beiden Kerne beim Kaninchen abgebildet (Fig. 6a und 6b).

## Thalamus.

Wie auch beim Igel differenziert sich inmitten der grauen Substanz des vorderen Zweihügels der Nucl. praebigeminalis (n pr bgm). Beim Kaninchen ist dieser Kern topographisch noch deutlicher abgegrenzt. Anfangs hat er die Form eines Dreiecks, dessen Basis dorsal gelegen ist (Fig. 2). Mit dem Hervortreten des Ganglion habenulae verdrängt der Nucl. praebigeminalis die dorsal von ihm gelegenen Zellen des vorderen Zweihügels und nimmt erst im Thalamusgebiet die dorsale Partie des Präparats ein (Fig. 6). Hier zeigt er eine birnenförmige Figur. Mit der Entwicklung der ventralen Partie des Nucl. communis verschwinden die ventral gelagerten Zellen des Nucl. praebigeminalis, und bald verliert der Kern überhaupt seine Begrenzung. Die Gründe, die uns veranlaßten, diesen Zellenkomplex beim Igel als selbständigen Kern zu betrachten, behalten auch beim Kaninchen ihre Kraft, ja die Unabhängigkeit seiner Abgrenzung vom Faserlauf ist beim Kaninchen noch auffallender. Wenn der oben beschriebene Kern gut abgegrenzt ist, was in dem Gebiete des vorderen Zweihügels auch schon im Thalamus der Fall ist, so vermischt sich das ventral und medial von ihm gelegene Grau des Zweihügels mit den jetzt auftretenden Kernen des Thalamus so stark, daß in dieser Übergangszone (übz) nicht mehr bestimmt werden kann, welche Zelle zu den Kernen des Thalamus und welche zum Grau des Zweihügels gehört (Fig. 6). Nur wenn das Corp. gen. lat. gute Umrisse bekommt, enthält der Nucl. communis (n cs th), und zwar sein ventraler Teil, ziemlich scharfe Umrisse. Dieser ventrale Teil verbreitet sich sowohl dorsal- wie auch medialwärts und bildet die nicht scharf voneinander abgegrenzte Pars dorso-lateralis und Pars medialis des Nucl. communis (Fig. 10). Von der letzteren schneidet der Fasciculus retroflexus (Fasc. Meynerti) eine Zellsäule ab, die dem Rand des 3. Ventrikels parallel verläuft (Fig. 10). Auf der Höhe der Commissura media verschmilzt der abgetrennte Teil mit dem Hauptteil der Pars medialis. Die Zellen der Pars medialis liegen jetzt etwas locker (Fig. 14). Die größte Entwicklung erreicht die Pars medialis des Nucl. communis in dem vorderen Drittel des Thalamus und geht wie ein mächtiger Streifen durch die Commissura media auf die andere Seite über (Fig. 18). In den oralsten Schnitten wird der mediale Teil durch die Fasern in drei Gruppen zerlegt (Fig. 22). Der Hauptteil liegt jetzt mehr lateral, seine Abschnitte lagern sich dorsal und medial

von ihm. Der mediale Abschnitt ist der oralste Teil des Nucl. communis: er erstreckt sich bis zum vorderen Pol des Thalamus (Fig. 26).

Auf Kosten des Corp. gen. lat. verbreitet sich der dorso-laterale Teil des Nucl. communis. Nach vollständigem Verschwinden des äußeren Kniehöckers nimmt er dessen Areal ein (Fig. 18). Von hier erstrecken sich seine Zellen ventral und bilden zusammen mit denen der Pars ventralis des Nucl. communis die graue Substanz der Gitterschicht. In der oralen Partie der Gitterschicht müssen wir zwei Zellarten unterscheiden (Fig. 22). Die ventral gelagerten gehören zu denen des Nucl. communis; in dem dorsalen Teil lagern sich dagegen große, intensiv sich färbende, feinere Schollen und einen großen Kern aufweisende Zellen. Mit Rücksicht auf ihre lockere Lagerung möchte ich sie nicht als einen besonderen Kern ausscheiden. — Die Lage des ventralen Teils bleibt in allen Ebenen des Thalamus gleich, d. h. zentral. Im oralen Drittel des Thalamus, wenn der größte Teil ihrer Zellen bereits verschwunden ist, sind die noch vorhandenen Zellen der Pars ventralis etwas größer und lockerer gelagert. Einzelne Züge von ihnen verlaufen durch die Commissura media (Fig. 22), in der sie sich mit den Zellen des Nucl. medianus (s. unten) und des zentralen Höhlengraues mischen. Die Zellen des Nucl. communis sind rund und birnenförmig und in allen seinen Teilen gleich. Sie lassen sich schwach färben. Der Kern liegt in der Mitte der Zelle und ist ziemlich groß.

Ungefähr in der Ebene, wo der mediale Kniehöcker bereits verschwindet, tritt unweit vom Rand des 3. Ventrikels eine schmale, gut abgegrenzte Zellensäule hervor (n mdn Fig. 10). Diese Säule bildet den Anfang des Nucl. medianus. Zwischen diesem Kern und dem durch den Fasc. retoflexus abgeschnittenen Teil der Pars medialis des Nucl. communis liegen die Zellen des zentralen Höhlengraues. Der Nucl. medianus geht unmittelbar in die Commissura media über (Fig. 14). Er verschmilzt mit dem entsprechenden Kern der Gegenseite und liegt somit wie eine Raphe in der Mittellinie (Fig. 14). Ohne seine Form und Lage zu ändern, zieht er sich bis zum vorderen Drittel des Thalamus, wo er durch den breiten Zellenzug der Pars medialis des Nucl. communis in einen dorsalen und einen ventralen Teil zerlegt wird (Fig. 18). Die Zellen des ventralen Abschnitts vermischen sich mit denen des Nucl. communis und des zentralen Graues (s. oben); die dorsale Partie breitet sich lateralwärts aus und verliert ihre scharfe Abgrenzung. Es ist bemerkenswert, daß beim Kaninchen der Nucl. medianus, der

den eigentlichen Kern der Commissura media bildet, seinen Anfang bzw. sein Ende inmitten des zentralen Höhlengraues nimmt.

Auf der Höhe der äußeren Gitterschicht setzt im dorsalen Gebiete des Thalamus der Nucl. anterior (n ant th) ein (Fig. 14). Dieser Kern besteht aus intensiv sich färbenden, dreieckigen und länglichen, dicht aneinander gelagerten Zellen. In seinem Anfang nimmt dieser Kern in Gestalt einer breiten Schicht, die aus 5—6 parallel gelegenen Zellreihen besteht, das mittlere Drittel der dorsalen Partie des Thalamus ein (Fig. 14). Wenn der Nucl. cuneiformis (s. unten) hervortritt, liegt der Nucl. anterior deckelförmig unmittelbar über ihm (Fig. 18 und 22). Auf mehr oralen Schnitten dehnt sich der Nucl. anterior in der Längsrichtung aus und nimmt fast die ganze dorsale Seite des Präparats ein (Fig. 22). Wenn der Nucl. cuneiformis (n cnfm th) die dorso-laterale Ecke einnimmt, drängt er den Nucl. anterior medialwärts (Fig. 22 rechts). Dieser biegt sich in der Form einer Sichel um und erstreckt sich weit oralwärts (Fig. 26). Die intensive Färbung der Zellen läßt schon mit bloßem Auge den Nucl. anterior in seiner ganzen Ausdehnung erkennen.

Unmittelbar unter dem eben beschriebenen Kern lagert sich der Nucl. cuneiformis (n cnfm th). Die Hauptmasse dieses Kerns besteht aus sehr kleinen runden blassen Zellen. Zwischen diesen sind im dorsalen Teil des Kerns auch einzelne grössere Elemente vorhanden. Ich konnte nicht feststellen, ob diese letztere dem eigentlichen Nucl. cuneiformis zugerechnet werden müssen, oder ob es sich um die Zellen handelt, die vom Nucl. communis aus hierher vordringen. In seiner kaudalen Ebene hat der Kern die Form eines Keils, dessen Basis dorsal, dessen Spitze ventral gerichtet ist (Fig. 18 rechts). Die weitere Entwicklung dieses Kerns geht folgendermaßen vor sich. Auf 5—6 Präparaten sehen wir ihn etwas verschwommen, er gewinnt aber dann sofort wieder seine gute topographische Abgrenzung. Jetzt aber lagert er sich schief und hat eine ovale Form (Fig. 22). Er bewahrt diese Form, lagert sich im dorso-lateralen Winkel und läßt sich bis zum Schluß der Serie verfolgen (Fig. 26). Von allen Kernen des Kaninchenthalamus zieht sich der Nucl. cuneiformis am meisten oral.

Lateral vom Nucl. cuneiformis liegt der Nucl. bicruralis (n bcrl th). Er besteht aus zwei Schenkeln, die einen nach außen geöffneten Winkel bilden (Fig. 18). Der ganze Kern hat eine geringe Ausdehnung, man kann ihn nur auf 15—18 Präparaten verfolgen. Seine Zellen sind die größten

im Thalamus des Kaninchens. Sie sind rund und polygonal und lassen sich intensiv färben.

Literatur. Nucleus anterior war wahrscheinlich schon Luys (36) bekannt, der ihn mit dem Namen Corpus album subrotundum bezeichnet. Diesen Kern finden wir auch bei von Gudden (24) (Taf. 20) abgebildet. — Ganser (23) hat zuerst darauf aufmerksam gemacht, daß der Thalamus des Kaninchens an Kernen reicher ist als der noch niederer Tiere, z. B. des Maulwurfs. Nißl (46) bemerkt, daß der Nucl. ventralis (p. ventralis Nucl. communis) ohne scharfe Grenze in die anderen Kerne übergeht. Cajal (10) konnte bei der neugeborenen Maus keinen Unterschied in der Struktur der Zellen des lateralen, medialen und ventralen Kerns finden. Haller (25) spricht von einem Kern der Maus, in dem andere eingebettet sind. Alle Kerne des Thalamus sollen nach Haller (25) eine Folge der Differenzierung zweier ursprünglicher, schon bei Emys vorhandener Kerne sein: des Nucl. magnus und des Rindenkerns. — Forel (21), Kölliker (31), Cajal (11) leugnen einen dem Centre median des Menschen entsprechenden Kern beim Maulwurf, bei der Maus und beim Kaninchen.

Mit Rücksicht darauf, daß das Kaninchen ein Versuchstier par excellence ist, haben die Autoren die Kerne des Thalamus vorwiegend bei diesem Geschöpfe studiert. Es würde zuviel Raum beanspruchen und der Klarheit durchaus nicht dienlich sein, wenn ich die Ergebnisse der Untersuchungen aller Verfasser im einzelnen erwähnen und sie mit den meinigen vergleichen wollte. Ich halte es daher für zweckmäßig, sie in einer Tabelle darzustellen. Die Beschreibungen von Ganser (23), Nißl (46), Kölliker (31), Münzer und Wiener (45) beziehen sich auf das Kaninchen, diejenigen von Cajal (11) teilweise ebenfalls auf dieses Tier, im übrigen aber auf die Maus und das Meerschweinchen. Cajals Benennungen habe ich jedoch in die Tabelle aus folgenden Gründen aufgenommen: a) alle 3 Tiere gehören zu derselben Ordnung (Rodentia), b) im Bau ihres Thalamus sollen sie nach Cajal ähnlich sein und c) Cajal selbt homologisiert seine Kerne mit denjenigen von Nißl. Ich habe mir auch erlaubt, die französischen Benennungen Cajals lateinisch wiederzugeben (s. nebenstehende Tabelle).

### Substantia grisea des 3. Ventrikels.

Auf der Höhe der Übergangszone ist das zentrale Grau gut abgegrenzt (Fig. 6). Es besteht aus einer großen Zahl kleiner runder Zellen, die nahe am Rand des Ventrikels liegen. In den Ebenen des Thalamus verliert die Substantia grisea des 3. Ventrikels (sgv) ihre scharfen Umrisse, aber die Kleinheit ihrer Zellen erlaubt es, sie auch hier von den Zellen des Nucl. communis zu unterscheiden. Je mehr die mediale Partie des Nucl. communis sich vergrößert, desto mehr verdünnt sich das Zentrale Grau. Der durch die Commissura media abgeteilte Divertikel des 3. Ventrikels ist mit dichterer Schicht des Höhlengraues umkleidet. Der Charakter der Zellen bleibt derselbe. Das Zentrale Grau des 3. Ventrikels erstreckt sich dorsalwärts und bildet die untere Etage der Commissura media (Fig. 14, 18 u. 22).

Literatur. Das eben erwähnte Grau des unteren Teils des 3. Ventr. hat Cajal (11) als besonderen Kern ausgeschieden und als Nucl. commissuralis inferior bezeichnet.

| Ganser | Nißl, Münzer und Wiener | Kölliker | Cajal | Verfasser |
|---|---|---|---|---|
| Vorderer Kern | Vorderer dorsaler Kern | Nucl. intermedius | Nucl. angularis | Nucl. anterior |
| — | Vorderer ventraler Kern | Nucl. dorsalis | — | Nucl. cuneiformis |
| — | Vorderer medialer Kern | — | Nucl. anterior internus | Nucl. communis (pars medialis) |
| Nucl. medialis | Medialer mittlerer Kern, Nucl. arcuatus | Nucl. centralis griseus | Nucl. commissurae superior | Nucl. communis (pars medialis) |
| Nucl. lateralis | Lateraler vorderer Kern | Nucl. dorsalis | Nucl. dorsalis | Nucl. communis (pars lateralis) |
| Großzelliger Kern | Großzelliger Kern | — | — | Nucl. bicruralis |
| — | Ventraler Kern | Nucl. lateralis | Nucl. sensitivus | Nucl. communis (pars ventralis) |
| — | Kern der Mittellinie | — | Nucl. superior Raphe | Nucl. medianus |
| — | Hinterer Kern | — | Nucl. praebigeminalis | Nucl. praebigeminalis |
| Hinterer mittlerer Kern | Hinterer mittlerer Kern | — | — | Nucl. communis |
| Die Graue Substanz der äußeren Gitterschicht | Ventraler Kern (der Gitterschicht) | — | Nucl. reticularis | Nucl. communis + große Zellen der äußeren Gitterschicht |
| | Dorsaler Kern (der Gitterschicht) | — | | |
| | Lateraler Kern (der Gitterschicht) | — | | |
| — | — | — | Nucl. accessorius anterior (Nucl. sensitivi) | Gruppen des Nucl. communis |
| — | — | — | Nucl. accessorius posterior (Nucl. sensitivi) | |

## Hypothalamus.

Ebenso wie beim Igel lagern sich ventral von der Substantia nigra zwischen die Fasern des Fußes dreieckige Zellen, die kleiner sind und sich schwächer färben lassen als die der Substantia nigra (sn und $sn_1$ Fig. 2

und 6). Die Frage nach ihrer Selbständigkeit habe ich schon bei der Beschreibung der entsprechenden Zellen beim Igel berührt. Besonders scharf treten einige dreieckige Zellen hervor, die gleichsam die laterale Fortsetzung der Substantia nigra bilden und sich durch feine deutliche Schollen auszeichnen. Zwischen diese Zellen und das Corp. gen. med. lagern sich längliche, sich schwach färbende Zellen des Nucl. peripeduncularis lateralis (n ppe l Fig. 6). Dieser Kern teilt sich in zwei Äste. Der eine verläuft der Substantia nigra fast parallel, der andere zweigt sich vom Nucl. peripeduncularis unter einem Winkel dorsalwärts ab (Fig. 6). Während auf mehr oralen Schnitten der dorsale Zweig seine Begrenzung verliert, ist der ventrale noch gut wahrzunehmen. Er erstreckt sich zur Mittellinie und dorsalwärts, wobei er sich dem Ventralen Grau des Corp. gen. lat. nähert (Fig. 10 und 14). — Der Nucl. hypothalamicus (n hpth) ist scharf abgegrenzt, größer und mehr nach oben gewölbt als beim Igel (Fig. 14). Er nimmt das Areal ein, das dem mittleren Drittel der jetzt verschwundenen Substantia nigra entspricht. Ventral von ihm liegen die Zellen, die eine Fortsetzung derjenigen bilden, die wir bereits bei der Beschreibung der Substantia nigra erwähnten. Der Nucl. hypothalamicus besteht aus dreieckigen und länglichen sich schwach färbenden Zellen, die 3—4 parallel verlaufende Reihen bilden. Das Protoplasma der Zellen ist ganz homogen.

Das Griseum subthalamicum läßt sich beim Kaninchen in zwei topographische Gebiete einteilen: Area centralis und Area medialis. Die erste liegt zwischen der Substantia nigra bzw. dem Nucl. hypothalamicus und der ventralen Partie des Nucl. communis (gr sb th), die zweite lagert sich hauptsächlich parallel dem Rand des dritten Ventrikels (gr sb th, Fig. 10 und 14). Die Struktur der meisten Zellen ist in beiden Areae so unklar und so durch den Faserverlauf bedingt, daß sie kein Merkmal abgeben kann, um sie in besondere Kerne abgrenzen zu können. In den kaudalsten Schnitten sind im Griseum subthalamicum einige große, viereckige, deutliche Schollen aufweisende Zellen, die wohl noch zum Nucl. ruber (n rbr) gehören. Auch im mittleren Teile des Griseum subthalamicum, und zwar in der Nähe des Ventralen Graues des Corp. gen. lat., sind einige drei- und viereckige Zellen vorhanden, die feine, aber deutliche Schollen aufweisen. Die blassen, kleinen, länglichen Zellen des Griseum subthalamicum liegen in der Area centralis nicht so zerstreut wie in dem entsprechenden Gebiete der anderen von mir untersuchten Tiere und zwar bilden sie eine breite

Schicht, die sich parallel dem Nucl. periped. lat. lagert (Fig. 10 und 14). Auch ventral vom Nucl. periped. lat. lagern sich einzelne Zellen des Griseum subthalamicum. Die Area centralis erstreckt sich mehr oral als der Nucl. hypothalamicus (Fig. 18).

Das Corpus mamillare ist beim Kaninchen paarig, und im kaudalsten Teil wird seine graue Masse von Zellen des Nucl. medialis des Corpus mamillare (n m c mam) gebildet. Sie sind zahlreich, rund, klein und färben sich schwach. Etwas mehr oral erscheinen die größeren, dreieckigen, intensiv sich färbenden Zellen des Nucl. lateralis (n l c mam). Dieser letztere Kern ist bedeutend kleiner als der Nucl. medialis und liegt hauptsächlich an der Peripherie (Fig. 10). Auf seiner größten Entwicklungsstufe verschmilzt der Nucl. medialis mit dem gleichnamigen Kern der entgegengesetzten Seite. Die verschmolzenen Zellen beider Kerne bilden eine unpaare Zellensäule, die wie eine Raphe zwischen den beiden medialen Kernen aussieht (Fig. 10). Durch Fasern werden vom Nucl. medialis einige Inseln abgetrennt.

Der Nucl. supramamillaris (n sp mam) ist beim Kaninchen paarig und topographisch besser als beim Igel abgegrenzt (Fig. 10). Der Größe nach nehmen auch beim Kaninchen die Zellen dieses Kerns eine Mittelstelle zwischen den Zellen der beiden übrigen Kerne des Corpus mamillare ein. Der Nucl. medialis geht ohne scharfe Grenze in das Grau des Tuber cinereum über und das Areal der unpaaren Säulen wird jetzt durch den Nucl. supramamillaris ersetzt (Fig. 14). Auf der Höhe des Fornix können die Nucl. medialis und supramamillaris schon nicht mehr wahrgenommen werden, der laterale Kern dagegen läßt sich noch weiter oral verfolgen.

Literatur. Auch hier war von Gudden (24) der erste, der darauf hingewiesen hat, daß das Grau der C. mamill. bei Kaninchen, Hund, Katze, Affen und Menschen in mehrere Kerne zerfällt. In seiner ersten Arbeit über die Corpora mamillaria (24, S. 173) unterscheidet von Gudden den kleinzelligen medialen und den großzelligen lateralen Kern. In der zweiten (24, S. 190) beschreibt er den lateralen, einen hinteren ventralen und einen vorderen dorsalen Kern. Die Zellen dieses letzteren sind nach von Gudden kleiner als die des lateralen und größer als die des medialen Kerns. Darum nehme ich an, daß sein vorderer dorsaler Kern dem Nucl. supramamill. entspricht. Kölliker (31) unterscheidet im C. mamill. des Kaninchens und der Maus nur den lateralen und den medialen Kern. Hallers (25) Ansicht nach ist das C. mamill. bei der Maus unpaar und besteht aus einem medialen und einem lateralen Kern. Letzterer zerfällt in einen unpaaren und in zwei symmetrische laterale Abschnitte. Im oralen Teile soll der mediale Kern aus 2 ventralen und 2 dorsalen Zellengruppen bestehen. Cajal (11) erwähnt den Nucl. limitans, der oral und dorsal von dem medialen Kern liegt.

Haller (25) beschreibt bei der Maus ein Gangl. hypothal. med., das er auf seiner Fig. 20 abbildet. Meiner Ansicht nach entspricht es dem Nucl. periped. later. Außer diesem beschreibt Haller noch ein Gangl. hypothal. later. und homologisiert es mit dem Nucl. hypothal. Da es festgestellt ist, daß die Maus einen gut abgegrenzten Nucl. hypothal. hat (s. u.), scheint mir Hallers Meinung nicht richtig zu sein. Es ist wohl anzunehmen, daß Haller unter diesem Namen mehrere Kerne (den Nucl. hypothal., die Substantia nigra und die von ihr ventral gelegenen kleinen Zellen) zusammengefaßt hat. Auch Brauer (8) ist derselben Meinung über das Gangl. hypothal. later. Haller.

Aus der Beschreibung von Monakows (40) ist es nicht zu ersehen, ob er das Vorhandensein des Nucl. hypothal. beim Kaninchen anzunehmen geneigt ist. Kölliker (31) und Cajal (11) behaupten dagegen, daß der Kern bei dem Kaninchen bzw. bei der Maus gut abgegrenzt ist. Unter dem Namen Noyau suspedunculaire schied Cajal (11) bei der Maus einen Kern aus, der zwischen der Subst. nigra und dem C. gen. med. gelegen ist. Er entspricht somit dem Nucl. periped. later. Jacobsohn.

In der folgenden Aufzählung sind die Kerne des Diencephalon des Kaninchens zusammengestellt:

Metathalamus.

Nucl. suprageniculatus.
Nucl. ventralis corp. gen. medialis.
Nucl. dorsalis corp. gen. medialis.
Nucl. corp. gen. lateralis.
Griseum ventrale corp. gen. lateralis.

Epithalamus.

Nucl. medialis des Ganglion habenulae.
Nucl. lateralis des Ganglion habenulae.

Thalamus.

Nucl. praebigeminalis.
Nucl. communis — pars medialis.
Nucl. communis — pars latero-dorsalis.
Nucl. communis — pars ventralis.
Nucl. medianus.
Nucl. anterior.
Nucl. cuneiformis.
Nucl. bicruralis.

Substantia grisea des dritten Ventrikels.

Hypothalamus.

Nucl. hypothalamicus.
Griseum subthalamicum.
Nucl. supramamillaris.
Nucl. medialis corp. mamill.
Nucl. lateralis corp. mamill.

**Hund** (*Canis familiaris.* Ordnung: *Carnivora*).

Metathalamus.

Im Gegensatz zum Kaninchen besteht das Corp. gen. med. des Hundes nur aus einem Kern. Die Zellen des Nucl. corp. gen. med. (n c g med., Fig. 3, 7 und 11) entsprechen ihrem Charakter nach denen des ventralen Kerns des Kaninchens. Sie sind zahlreich, rund, klein und lassen sich schwach färben. In dem lateroventralen Teile des Corp. gen. med. sind sie in größerer Zahl vorhanden (Fig. 7). In dem medioventralen Teil des inneren Kniehöckers zwischen den Zellen des Nucl. corp. gen. med. lagern vereinzelte große Zellen (Fig. 7), die den kaudalsten Teil des unten beschriebenen Nucl. magnocellularis thalami (n mg th) darstellen.

Das Corp. gen. lat. beginnt mehr oral als das Corp. gen. med. und dorsolateral von ihm (Fig. 3). Seine graue Substanz besteht aus 2 Kernen: dem Nucl. principalis (n pr c g l) und dem Nucl. magnocellularis des Corp. gen. lat. (n mn cg l). Sie erscheinen gleichzeitig, und zwar so, daß die Zellen des großzelligen Kernes in der Mitte des Nucl. principalis liegen. Auf der größten Entwicklungsstufe des äußeren Kniehöckers gestalten sich die Verhältnisse zwischen beiden Kernen in der Weise, daß der Nucl. magnocellularis in der medialen Partie des Nucl. principalis liegt und eine nach dem Thalamus hin gerichtete Wölbung bildet (Fig. 7). Die einzelnen Zellen des Nucl. magnocellularis kommen in größerer und geringerer Zahl zwischen denen des Nucl. principalis vor. Gelegentlich sammeln sich diese Zellen in einer zweiten Reihe, die parallel der Wölbung des Nucl. magnocellularis verläuft, an Umfang aber hinter ihm zurückbleibt (Fig. 7). Wenn die Sehstrahlung in das Corp. gen. lat. eindringt, teilt sie es in 2 Teile, den kleineren dorsalen und den größeren ventralen (Fig. 11). Die graue Substanz des dorsalen Teiles setzt sich aus den Zellen des Nucl. principalis zusammen, während in dem ventralen beide Zellenarten verbleiben. Zellen, die sich von beiden

Kernen abtrennen, lagern sich auch zwischen die Fasern der Sehstrahlung. Sobald der ventrale Teil in seinem Umfang zurückgeht, erscheint latero-ventral von ihm das Ventrale Grau des Corp. gen. lat. (gv c g lat., Fig. 11). Dies ist aus kleineren, runden, sich schwach färbenden Zellen zusammengesetzt. Topographisch ist das Ventrale Grau gut abgegrenzt, jedoch kleiner als beim Igel und beim Kaninchen. — Am kaudalsten verschwindet der dorsale Teil, der ventrale und das Ventrale Grau ziehen sich mehr oral und verschwinden fast gleichzeitig.

Literatur. In dem Corp. gen. med. beim Hunde und bei der Katze schied von Monakow (43) von den Zellen, die die Hauptmasse bilden, einen aus größeren Zellen sich zusammensetzenden Haufen aus, den er Corp. gen. med. internum benennt. Kölliker (31) erwähnt, daß die beiden Kniehöcker bei der Katze groß sind. Der Meinung von Lewandowsky (32), daß sein Nucl. parageniculatus die kaudale Fortsetzung des ventralen Kerns des Thalamus (nach meiner Schilderung des Nucl. magnocellul. thalami) bildet, kann ich mich nur anschließen. von Monakow (43) bemerkt, daß das Corp. gen. med. der Katze seiner Architektonik nach demjenigen des Menschen ähnlich ist. Nach Cajal (11) dagegen ist es bei der Katze wie beim Kaninchen gebaut; er unterscheidet in ihm einen dorsalen und einen ventralen Kern und einen großzelligen Nucl. profundus. Die Fig. 177 in Cajals Lehrbuch (11) stellt vortrefflich die sämtlichen Kerne des Corp. gen. med. der Katze dar; sie ist nach einem mit dem Nißlschen Verfahren gewonnenen Präparat hergestellt.

Die beiden Teile des Corp. gen. lat. sind schon bei Wernicke (56, Fig. 45) vortrefflich abgebildet. von Monakow (43) unterscheidet die beiden Teile und ein Corp. gen. lat. »o«. Das letzte entspricht dem Ventralen Grau (mihi). da Fano (18) spricht nur von einer dorsalen und einer ventralen Partie. — Auf die großzelligen Elemente des Corp. gen. lat. machte zuerst von Monakow (43) aufmerksam. Sie werden auch von da Fano (18) erwähnt.

Schon Forel (20) bemerkt, daß der schichtenartige Bau, der für den äußeren Kniehöcker des Menschen und des Affen so charakteristisch ist, bei der Katze nur schwach angedeutet ist. Ellenberger und Baum (17) dagegen betonen die vielfache Schichtung des Corp. gen. lat. bei dem Hunde. Auf einer meiner Serien habe ich die Schichtung des Corp. gen. lat. schwach angedeutet gesehen; in andern fehlte sie vollständig.

## Epithalamus.

Beide Kerne des Gangl. habenulae erscheinen gleichzeitig (Fig. 11). Der Nucl. medialis (n m gh) ist beim Hunde schon kleiner als bei den vorher beschriebenen Tieren, indem er flacher geworden ist. Ebenso wie beim Kaninchen liegen die Zellen des Nucl. medialis sehr dicht, diejenigen des Nucl. lateralis (n l gh) locker. Ihrer Struktur nach unterscheiden sich die Zellen der beiden Kerne nicht von denjenigen des Kaninchens. Auf der Höhe der Commissura media verschwindet der mediale Kern, während der laterale sich noch auf 25—30 Präparate weiter oral erstreckt (Fig. 15).

Literatur. Die beiden Kerne sind von da Fano (18) abgebildet und beschrieben. Ich kann diesem Verfasser nicht beipflichten, daß das Gangl. hab. bei dem Hunde sich so weit oralwärts hinzieht, wie er es auf seiner Fig. 1 abbildet. Sein Bild ist wahrscheinlich durch schiefe Schnittrichtung bedingt.

## Thalamus.

Der kaudalste Teil des Nucl. communis (n c sth) ist beim Hunde seine laterale Partie, die in Gestalt eines Keils zwischen die beiden Kniehöcker eindringt (Fig. 7). Auf den kaudalsten Schnitten ist sie sowohl von diesen als auch von der grauen Substanz des vorderen Zweihügels gut abgrenzbar. Etwas mehr oral geht sie ohne scharfe Grenze in die dorsale Partie des Nucl. corp. gen. med. über. Wenn die Fasern der Sehstrahlung in die Pars lateralis des Nucl. communis eindringen, nachdem sie das Corp. gen. lat. in 2 Teile getrennt haben, lagern sich einzelne Zellen des Nucl. communis zwischen sie und vermischen sich mit den Zellen beider Kerne des äußeren Kniehöckers (Fig. 11). Mit dem Erscheinen der Corp. mamillaria verbreitet sich der Nucl. communis so medialwärts, daß er an das Zentrale Grau des 3. Ventrikels grenzt (Fig. 11). Der Fasciculus retroflexus trennt von dieser medialen Partie des Nucl. communis einen inneren Abschnitt ab (Fig. 11); dieser Abschnitt verschmilzt beim Hunde schneller als beim Kaninchen mit dem Hauptteil. Die größte Entwicklung erreicht der Nucl. communis im Niveau der Commissura media, er nimmt das ganze Areal des Thalamus (im engeren Sinne des Wortes) ein (Fig. 15 und 19). Im oralen Drittel (Fig. 23) sondert sich in dem lateralen Teil des Nucl. communis ein Abschnitt ab. Seiner Form und seinem Verhältnis zum Nucl. anterior (s. u.) nach erinnert dieser Abschnitt sehr an den Nucl. cuneiformis des Kaninchens in seiner oralen Partie. Es ist mir jedoch wie auch da Fano (der diesen Abschnitt als Nucl. lateralis a bezeichnet) nicht gelungen Zellen aufzufinden, die ihrer Struktur nach von den übrigen Zellen der Pars lateralis unterschieden wären. Dieser Abschnitt verschmilzt bald mit dem Hauptteil, bald trennt er sich, wahrscheinlich infolge des Faserverlaufs, von ihm. Am weitesten oral erstrecken sich die ventralen Zellengruppen des Nucl. communis (Fig. 27). — Die graue Masse der Gitterschicht besteht aus einzelnen Inselchen von Zellen, die sich von der lateralen Partie des Nucl. communis absondern. — Die Zellen des Nucl. communis schwanken etwas in ihrer Größe: die größten befinden sich zwischen den Fasern der Sehstrahlung und in der medialen Partie. Vereinzelte größere Zellen sind jedoch im ganzen Nucl.

communis zerstreut. Die Zellen des Nucl. communis sind rund und polygonal und haben einen ziemlich großen Kern. Sie färben sich schwach; das Protoplasma ist so homogen, daß es sogar bei einer Vergrößerung 200—250 keine Schollen erkennen läßt. Der ganze Nucl. communis kann zum Zwecke der Darstellung in 3 topographische Teile zerlegt werden: Pars lateralis, medialis und ventralis. Die letztere tritt deutlich nur im oralen Teil des Thalamus hervor (Fig. 23 und 27). Auf den kaudalen und mittleren Schnitten dagegen lagert sich zwischen ihre Zellen ein Kern, der bei den vorher beschriebenen Tieren nicht vorhanden ist — der Nucl. magnocellularis thalami (n mg th). Dieser Kern beginnt mit einigen dicht an das Corp. gen. med. liegenden Zellen (Fig. 7), die wir bei der Beschreibung des inneren Kniehöckers berührt haben. Von hier breiten sich die Zellen dorsalwärts aus und erstrecken sich dann medialwärts, nachdem sie die obere Grenze des inneren Kniehöckers erreicht haben (Fig. 11). Das Wachstum des Kernes geschieht durch Auftreten einzelner Zelleninseln. Diese Inseln liegen hauptsächlich in dem ventralen und nur teilweise in dem lateralen Teile des Nucl. communis (Fig. 15 und 19). Zwischen den Zellen des Nucl. magnocellularis liegen bald in größerer, bald in geringerer Anzahl die Zellen des Nucl. communis; es kommen jedoch vereinzelte Inseln des Nucl. magnocellularis vor, die ganz frei von Zellen des Nucl. communis sind. Einzelne Reihen und Inselchen erstrecken sich auch dorsalwärts. Es tritt besonders eine Zellengruppe hervor, die am dorsalen Ende des Nucl. reuniens (s. u.) gelagert ist (Fig. 19). — Die Zellen des Nucl. magnocellularis sind die größten des ganzen Thalamus, rund und polygonal, und haben 2—3 deutliche Fortsätze. Ihr Protoplasma ist ganz homogen, und obgleich die Zellen des Nucl. magnocellularis sich ihrer Größe nach den motorischen Zellen (z. B. des Nucl. ruber) nähern, lassen sie bei mittlerer Vergrößerung keine Schollen erkennen, und der Kern lagert sich exzentrisch, was in gewissem Grade typisch für die Zellen des Nucl. magnocellularis ist.

Im Niveau der Commissura media erscheint die Zellensäule des Nucl. medianus (n mdn, Fig. 15). Der Unterschied dieses Kernes beim Kaninchen und beim Hunde besteht darin, daß der Nucl. medianus des ersteren inmitten des Zentralen Graues des 3. Ventrikels beginnt (Fig. 10), während er beim Hunde erst nach dem Auftreten der Commissura media erscheint. Von hier aus schnell wachsend, verschmilzt der Nucl. medianus mit dem gleichnamigen Kern der anderen Seite und liegt in der Mitte der Commissura

media als eine mehr oder weniger breite Kolonne. Er erstreckt sich ventralwärts vom Nucl. reuniens. Die Zellen des Nucl. medianus sind klein, fusiform und lassen sich schwach färben.

Seiner Lage, Architektonik und Zellenstruktur nach ist der Nucl. anterior (n ant th) des Hundes (Fig. 23) ein genaues Wiederspiel des gleichnamigen Kerns des Kaninchens (Fig. 14, 18 und 22). Er besteht jedoch bei dem Hunde aus einer geringeren Zahl von Zellenreihen (3—4). Einzelne Zellen des Nucl. anterior lagern sich medial vom Hauptteile (Fig. 23). In weiter oral gelegenen Schnitten wechselt der Nucl. anterior ebenso wie beim Kaninchen seine Stelle. Aus dem dorsalen Gebiete durch den lateralen Teil des Nucl. communis herausgedrängt, biegt er sich medioventral und lagert sich schließlich fast parallel der Mittellinie (Fig. 27).

Die ersten Inseln des Nucl. reuniens (n rn th) lagern sich vorwiegend zwischen die mediale Partie des Nucl. communis und den Nucl. magnocellularis thalami (Fig. 19). Je oraler die Schnitte liegen, desto größer ist die Zahl der Reihen und Inseln des Nucl. reuniens, und nicht selten wird die Verbindung zwischen ihnen durch die Zellen des Nucl. communis unterbrochen.

Im Niveau des Fornix verschmelzen die früher locker gelagerten Reihen zu einem schmalen Streifen, der sich durch die Commissura media zieht und auf die entgegengesetzte Seite übergeht (Fig. 23). Dieses schmale Band verdichtet sich in der Mitte der Commissura und bildet zusammen mit den Zellen des Nucl. medianus ein mächtiges Zellenkonglomerat in Form eines Kreuzes (Fig. 23). Die Zellen des Nucl. reuniens verschwinden im Niveau des Chiasma. Sie sind klein, länglich und färben sich schwach.

Literatur. Die Kerne des Thalamus bei der Katze und beim Hunde hat zuerst von Monakow (43) genau beschrieben. Bei ihrer Differenzierung auf mit Carmin gefärbten Präparaten war für ihn, neben ihrer Abgrenzung durch Marklamellen, auch Verschiedenheit ihres Zellencharakters maßgebend. Außerdem benutzte von Monakow (43) (zur bequemen Feststellung der Beziehungen zwischen bestimmten Rindenfeldern und Teilen der Thalamuskerne) auch willkürlich — wie er selbst sagt — gezogene Linien. Dadurch wird jeder einzelne Kern bei von Monakow in einige Unterkerne zerlegt. Er unterscheidet im Thalamus des Hundes und der Katze folgende Kerne: den Nucl. anterior a, c und b, den Nucl. lateralis a und b, den Nucl. medialis a, b und c, den Nucl. ventralis a, b und c und den hinteren Kern. Der hintere Kern entspricht wohl dem Teile des Nucl. communis (pars lateralis), der sich zwischen beiden Kniehöckern lagert. von Monakow (43) betont, daß die graue Masse der äußeren Gitterschicht ohne scharfe Grenze in die Kerne des Thalamus übergeht. von Monakow machte auf die erhebliche Größe der Zellen aufmerksam, die in seinen ventralen

Gruppen gelagert sind. — da Fano (18), der die Kerne des Thalamus des Hundes auf nach Nißlschem Verfahren hergestellten Präparaten studiert hat, teilte seine graue Substanz nach von Monakow ein. Das Studium der Zellenstruktur überzeugte ihn jedoch, daß die Zellen der von Monakowschen »Unterkerne« keinen Strukturunterschied aufweisen. — Unter dem Namen Nucl. Zonales faßt da Fano (18) den Nucl. anterior und seine etwas medial liegenden Zellen zusammen. Er hebt die Zellenstraße hervor, die durch die Commissura media verläuft und die zweifellos dem Nucl. reuniens entspricht. Der Nucl. medianus ist von da Fano unter dem Namen Nucleus commissurae mediae beschrieben worden. Die am dorsalen Ende des Nucl. reuniens gelegene großzellige Gruppe (Nucl. magnocell.) scheidet da Fano (18) als Nucl. triqueter aus. — von Monakow (43) glaubte annehmen zu dürfen, daß sein Nucl. medialis b dem Centre médian von Luys des Menschen entspricht. da Fano (18) ist es ebensowenig wie mir gelungen, im Thalamus des Hundes einen dem Luysschen entsprechenden Kern zu finden. Nach Forel (21) und Sachs (50) soll das Centre median beim Hunde nur schwach angedeutet sein. — Edinger (14B I) bildet auf Fig. 194 den Nucl. centralis beim Hunde ab; er liegt rapheartig in der Commissura und entspricht also dem Nucl. medianus. Unter dem Namen Nucl. intermedius. beschreibt Kölliker (31) den Nucl. anterior. — Bei allen von mir untersuchten Hunden habe ich die Commissura media stark entwickelt gesehen; nach Ellenberger und Baum (17) kann sie auch bei diesem Tiere fehlen.

### Substantia grisea des 3. Ventrikels.

Die Substantia grisea des 3. Ventrikels (sgv, Fig. 11, 15) besteht aus runden und birnenförmigen, schwach sich färbenden Zellen von schwankender Größe. Mit dem Erscheinen des Ganglion habenulae verliert allmählich das Zentrale Grau seine topographische Abgrenzung. Das Zentrale Grau, das den unteren Teil des 3. Ventrikels umhüllt, besteht aus Zellen desselben Charakters wie dasjenige des oberen Teiles. Es dehnt sich weit dorsalwärts aus und bildet die untere Etage der Commissura media (Fig. 19 und 23).

### Hypothalamus.

Die Substantia nigra ist beim Hund besser entwickelt und nimmt einen größeren Raum ein als bei den zwei vorher beschriebenen Tieren (sn, Fig. 3, 7 und 11). Die vereinzelten Zellen, die ventral von ihr gelegen sind, kommen nicht in so großer Anzahl (sn, Fig. 3, 7 und 11). Der Nucl. pedunc ularis lateralis (n ppe l) ist weniger entwickelt (Fig. 7 und 11). Sein medialer Schenkel hat keine scharfe Abgrenzung, der dorso-laterale dagegen ist deutlich topographisch abgegrenzt (Fig. 15).

Der Nucl. hypothalamicus (n hpth) ist als eine breite Zellenschicht, wie ein Segment, dessen Bogen nach dem Griseum subthalam., dessen Sehne zum Fuß gerichtet ist, gut abgegrenzt (Fig. 15). Das laterale Ende ist zellen-

reicher als das mediale. Nicht nur nach der Größe, sondern auch nach der Ausdehnung (Fig. 19) übersteigt der Nucl. hypothalamicus des Hundes den gleichnamigen Kern des Kaninchens. Die Zellen des Nucl. hypothal. färben sich stark, sind dreieckig und birnenförmig und haben ein homogenes Protoplasma.

Das Griseum subthalamicum (gr sbth) ist nicht so reich an Zellen wie beim Igel und beim Kaninchen. Im Gegensatz zum Kaninchen kann es in keine deutlichen topographischen Abschnitte zerlegt werden (Fig. 11 und 15). Seine Zellen sind in bezug auf Größe und Form äußerst wechselnd. Des Faserdrucks wegen ist die wahre Struktur der meisten Zellen nicht zu erkennen. Es finden sich auch Zellen, die eine viereckige Form, einen in der Mitte gelegenen Kern und deutliche Schollen besitzen. Diese Zellen liegen bald zerstreut, bald sammeln sie sich in kleinen Gruppen von 4 bis 5 Zellen. Besonders häufig kommen diese Zellen im kaudalsten Teil des Griseum subthal. vor, wo sie allerdings vielleicht zum Nucl. ruber gehören, (Fig. 11 und 15) und in den oralen Abschnitten. In diesen letzteren erscheinen sie vorwiegend lateral von der oberen Spitze der Infundibulargegend des 3. Ventrikels und in ihrer Nähe (Fig. 19 und 23). Auf derselben Höhe inmitten des Zentralen Graues liegen vereinzelte Gruppen von 5 bis 6 großen, runden, sich intensiv färbenden Zellen, die aus dem Griseum subthal. hierher eindringen.

Der Nucl. medialis (n m c mam) des paarigen Corp. mamillare liegt mehr kaudal als der laterale Kern (n l c mam). Anfangs umfaßt der laterale den medialen Kern von der ventro-lateralen Seite (Fig. 15). Dorsal und dorso-lateral ist der Nucl. medialis von einem Zellenhaufen umgeben, von denen einige Zellen dem Nucl. lateralis angehören, andere nähern sich ihrer Struktur nach dem Nucl. intercalatus (s. u.). Zwischen diesen zwei Typen gibt es auch Übergangszellen. Darum kann das eben geschilderte Grau (Fig. 15) beim Hund nicht als ein besonderer Kern angesehen werden. Zwischen den beiden eben erwähnten Kernen des Corp. mamillare lagert sich der dritte Kern — der Nucl. intercalatus (n i c mam) (der Name stammt von Malone). Dieser liegt in der ventro-lateralen Ecke des Corp. mamillare und ist gut abgegrenzt. Er besteht aus einer kleinen Zahl viereckiger, schwach sich färbender Zellen; auf ihrem ungefärbten Untergrund treten feine Schollen hervor. Der Nucl. intercalatus läßt sich auf 35—40 Präparaten verfolgen. Er tritt noch deutlich hervor, wenn der

mediale Kern schon verschwunden ist (Fig. 19). Der Nucl. lateralis erstreckt sich am weitesten oral (Fig. 19 und 23) und wird jetzt durch einige Zellen repräsentiert, die sich linear an der Peripherie lagern. Der Nucl. medialis besteht aus einer großen Zahl kleiner, runder, blaß sich färbender Zellen, der Nucl. lateralis aus wenigen größeren, dreieckigen, intensiv sich färbenden Zellen. Sie haben ein homogenes Protoplasma und 2—3 Fortsätze, die, sich untereinander verschlingend, ein Netz bilden.

Literatur. Nach von Monakow (43) ist der Nucl. hypothalamicus bei der Katze und beim Hunde prägnant ausgeprägt. Auch für Kölliker (31) ist es zweifellos, daß die Katze einen gut entwickelten Nucl. hypothal. besitzt. Der Nucl. hypothal. des Hundes bzw. der Katze ist als ein gut abgegrenztes Gebilde bei Edinger (14B I, Fig. 145), Probst (48, Fig. 7) und Sano (52) abgebildet. — von Monakow (43) weist darauf hin, daß die Zona incerta des Hundes eine große Anzahl Ganglienzellen von verschiedenem Bau und Charakter enthält. — Die kleineren Zellengruppen, die aus dem Griseum subthalam. in das zentrale Höhlengrau eindringen, sind schon bei Luys (35, Pl. X, Fig. 1) abgebildet. Sie werden auch von Forel (20) erwähnt. Im Corp. mamill. der Katze unterscheidet Kölliker (31) nur 2 Kerne, den medialen und den lateralen. Edinger und Wallenberg (16) beschreiben beim Hunde außer dem Nucl. med. und lat. noch einen Kern, der im frontalen Abschnitte des Corp. mamill. gelegen ist. Nach Martin (38) soll die Katze ein vierfaches Corpus mamillare besitzen.

In der folgenden Tabelle sind die Kerne des Diencephalon des Hundes aufgezählt.

Metathalamus.

Nucl. corp. gen. medialis.
Nucl. principalis corp. gen. lateralis.
Nucl. magnocellularis corp. gen. lat.
Griseum Ventrale corp. gen. lat.

Epithalamus.

Nucl. medialis des Gangl. habenulae.
Nucl. lateralis des Gangl. habenulae.

Thalamus.

Nucl. communis thalami — pars medialis
— pars lateralis
— pars ventralis (deutlich nur im oralen Drittel).

Nucl. magnocellularis thalami.
Nucl. medianus thalami.
Nucl. anterior thalami.
Nucl. reuniens thalami.

Substantia grisea des dritten Ventrikels.

Hypothalamus.

Nucl. hypothalamicus.
Griseum subthalamicum.
Nucl. medialis corp. mamillaris.
Nucl. lateralis corp. mamillaris.
Nucl. intercalatus corp. mamillaris.

Affe (*Macacus rhesus*. Ordnung: *Pitheci*).

Metathalamus.

Die graue Substanz des Corp. gen. med. besteht beim Affen, wie auch beim Hunde, aus Zellen nur eines einzigen Kerns — des Nucl. corp. gen. med. (n c g med., Fig. 4 und 8). Sie sind klein, rund und birnenförmig und färben sich schwach. Die Zellen des Nucl. corp. gen. med. liegen bald mehr, bald weniger dicht, was wahrscheinlich durch den Faserverlauf bedingt ist. Der Nucl. corp. gen. med. ist deutlich sowohl vom Grau des vorderen Zweihügels als auch im oralen Schnitte von den Kernen des Corp. gen. lat. abgrenzbar. Das Corp. gen. med. ähnelt auch dadurch dem des Hundes, daß in seiner medialen Partie große Zellen lagern (Fig. 4). Nur treten sie in geringerer Zahl und nicht linear angeordnet, wie beim Hunde, sondern in Gestalt einzelner Inselchen von 2 bis 3 Zellen auf. Wie beim Hunde, stellen sie eine kaudale Fortsetzung des Nucl. magnocellularis thalami (n mg th) dar.

Das Corp. gen. lat. ist lateral und etwas oral von dem Corp. gen. med. gelegen (Fig. 4). Es lassen sich in ihm deutlich 2 Kerne unterscheiden: der Nucl. principalis (n prc gl) und der Nucl. magnocellularis (n mn c gl). Der Nucl. principalis beginnt mehr kaudal (Fig. 4) mit 2 bis 3 parallel verlaufenden Zellenschichten; auf mehr oralen Schnitten (Fig. 8), medial von dem Nucl. principalis, lagern sich die Zellen des Nucl. magnocellularis. Im Niveau des Ganglion habenulae, lateral vom Nucl. corp. gen. med., erscheint

die andere Partie des Nucl. principalis, etwas mehr oral auch der zweite Schenkel des Nucl. magnocellularis. Diese beiden nachträglich erscheinenden Teile der beiden Kerne breiten sich dorsalwärts aus und begegnen sich mit den ersteren. Auf seiner höchsten Entwicklungsstufe (Fig. 12) besteht der Nucl. principalis aus 6 bis 7 konzentrischen Schichten. Jede dieser Schichten besteht aus einigen parallelen Zellenreihen. Die äußerste Schicht besteht aus 7 bis 8 Zellenreihen, in den übrigen schwankt die Zahl zwischen 3 bis 5. Die Schichten des Nucl. principalis sind nicht in ihrer ganzen Ausdehnung voneinander abgetrennt, sie berühren sich bald mit größerem, bald mit geringerem Teile. Der Nucl. principalis umschließt den Nucl. magnocellularis von der dorsalen, medialen und lateralen Seite (Fig. 12). Der Nucl. magnocellularis besteht ebenfalls aus 3 bis 4 Schichten und jede einzelne Schicht aus 3 bis 4 Zellenreihen. Einzelne Zellen des Nucl. magnocellularis dringen in die Nachbarschichten des Nucl. principalis. In seinem oralen Teile wird der Nucl. magnocellularis in einzelne Inselchen zerlegt. Der Nucl. principalis zieht sich mehr oral hin als der Nucl. magnocellularis. In dem oralen Teil des Corp. gen. med. lat. (Fig. 16) weist der Nucl. principalis keine Schichten mehr auf und stellt ein rhombusförmiges, aus dicht aneinanderliegenden Zellen bestehendes Konglomerat dar. — Die Zellen des Nucl. principalis sind oval oder rund, die des Nucl. magnocellularis größer, birnenförmig, mit 1 bis 2 deutlichen Fortsätzen. Die Zellen der beiden Kerne lassen sich intensiv färben und erhalten eine leichte violette Nuance. Die starke Färbung und der charakteristische schichtenartige Bau macht es möglich, das ganze Corp. gen. lat. mit unbewaffnetem Auge zu verfolgen.

Literatur. Außer den spärlich vorhandenen Ergebnissen über die Kerne des Diencephalon des Affen werde ich auch diejenigen über die Kerne des menschlichen Diencephalon kurz angeben. Am ausführlichsten beschreibt Malone (37) diese Kerne beim Menschen. Seine Angaben werde ich vorwiegend benutzen. Bei Malone findet sich auch die Literatur über die Kerne des menschlichen Diencephalon.

Das Corp. gen. med. besteht beim Menschen nach Malone (37) aus 2 Kernen, dem ventralen und dem dorsalen. Nach von Monakow (43) dagegen sind die beiden Kniehöcker des Menschen ebenso wie die der Katze gebaut, ihr Unterschied soll nur in der Lage des Corp. gen. lat. bestehen.

Auf den schichtenartigen Bau des Corp. gen. lat. beim Menschen und beim Affen haben Meynert (39) und Forel (20) hingewiesen. Stilling (53) erwähnt beim Affen eine graue Masse, die zwischen den beiden Kniehöckern gelegen ist, er wußte aber nicht, ob sie zum Corp. gen. lat. zu rechnen oder als ein überzähliges Ganglion des Corp. gen. med. zu betrachten sei (wahrscheinlich handelt es sich um den medialen Schenkel des Nucl. princip. corp. gen. lat.).

Das Corp. gen. lat. besteht auch beim Menschen (Malone) aus denselben Kernen wie beim Affen. Nach der 1. Figur Malones (37) zu urteilen, erreicht der Nucl. magnocell. beim Menschen eine größere Entwicklung als beim Affen.

## Epithalamus.

Der Nucl. lateralis des Ganglion habenulae (n lgh) lagert sich nicht nur lateral, sondern auch dorsal vom Nucl. medialis (Fig. 12) und erstreckt sich mehr oral (Fig. 16). Die im Vergleich zu den vorher beschriebenen Tieren erhebliche Größe der Zellen des Nucl. medialis und ihre gelegentliche dreieckige Form erlauben, sie beim Affen von den Gliazellen besser zu unterscheiden. Die Zellen des Nucl. lateralis sind groß, dreieckig und färben sich schwach.

Literatur. Die mediale Partie des Gangl. hab. rechnet Malone (37) beim Menschen dem Zentralen Grau des 3. Ventrikels zu. Somit entspricht sein Gangl. hab. nur dem lateralen Kerne dieses Gebildes.

## Thalamus.

Beim Affen ist der kaudalste Kern des Diencephalon der Nucl. communis (n cs th), und zwar seine Pars lateralis. Dieser Teil erreicht beim Affen eine enorme Entwicklung, und das ganze Pulvinar der makroskopischen Anatomie ist aus seinen Zellen zusammengesetzt (Fig. 4 und 8). Die Entwicklung des Nucl. communis geht in der Weise vor sich, daß die laterale Partie sich ventral zu den Kniehöckern und medial auf Kosten der grauen Massen des vorderen Zweihügels ausbreitet. Im Niveau des Gangl. habenulae (Fig. 12) nimmt der Nucl. communis das ganze Areal des Thalamus ein und grenzt an das Zentrale Grau des 3. Ventrikels. Von dem medialen Teile des Nucl. communis trennt der Fasciculus retroflexus, wie auch beim Hunde und Kaninchen, einen inneren Abschnitt ab. Im Anfang der Commissura media (Fig. 16) gelangt die Pars medialis, die sich durch ziemlich große Zellen auszeichnet, nahe an die Mittellinie. Zwischen dem medialen Teil des Nucl. communis und dem entsprechenden Teil der entgegengesetzten Seite (Fig. 20) bleibt jedoch ein zellenfreier Raum, der später durch den Nucl. medianus (Fig. 24) ausgefüllt wird. — Im oralen Drittel des Thalamus (Fig. 24) erscheint die dorsale Partie des Nucl. communis (n cs th pars dors.), eine Partie, die bei den vorher beschriebenen Tieren nicht vorhanden ist. Die Pars dorsalis ändert ihre Lage in dem Sinne, daß sie mehr und mehr medialwärts rückt und sich ventralwärts umbiegt. Auf den oralsten Schnitten

grenzt sie fast ganz an die Mittellinie (Fig. 28). Auf der Höhe der Pars dorsalis (Fig. 24) trennt sich inmitten des lateralen Teils ein ovaler Abschnitt ab. In diesem Abschnitt liegen die Zellen des Nucl. communis und einige des Nucl. reuniens (s. u.). Die topographische Abgrenzung dieses Abschnittes tritt nicht so deutlich wie beim Hunde hervor; der ganze Abschnitt verschmilzt bald mit dem Hauptteil der Pars lateralis. — Die graue Substanz der äußeren Gitterschicht wird von Zellen des lateralen Teils des Nucl. communis gebildet. Hierher dringen auch einzelne Zellen des Nucl. magnocellularis thalami (s. u.). In der Gitterschicht lagern sich die Zellen meistens in einzelne Gruppen. — Im Nucl. communis des Affen kann man 4 topographische Teile unterscheiden, die Pars lateralis, medialis, dorsalis und ventralis. Der ventrale Teil ist nur auf den kaudalen Schnitten deutlich abgegrenzt. — Die Zellen des Nucl. communis sind rund und polygonal, sie färben sich im kaudalen Teile des Thalamus etwas dunkler als im oralen. Die größten Zellen sind in der Pars medialis vorhanden, die kleinsten in der Pars dorsalis. Zwischen den verschiedenen Zellengrößen bestehen fließende Übergänge.

Die kaudalsten Zellen des Nucl. magnocellularis thalami (n mg th) liegen dicht neben dem Corp. gen. med. (Fig. 4 und 8). Von hieraus breiten sie sich hauptsächlich in dorso-lateraler Richtung und nur zum Teil medialwärts aus (Fig. 16). Wenn der Nucl. magnocellularis seine größte Entwicklung erreicht hat (Fig. 20), nimmt er fast die ganze laterale Partie und die laterale Hälfte der ventralen Partie des Nucl. communis ein. Dann hat er die Form einer mächtigen Schale, in welche der Nucl. communis gleichsam hineingelegt ist und deren konvexe Seite gegen die äußere Gitterschicht gerichtet ist. Der Kern liegt in toto ventro-lateral vom Nucl. reuniens (s. u.), einzelne seiner Inseln lagern sich jedoch auch medial von ihm. Mit dem Erscheinen der Pars dorsalis (Fig. 24) fängt der Nucl. magnocellularis sich zu verkleinern an, und zwar in der Reihenfolge, daß zunächst die dorsal gelagerten Zellen verschwinden. Am weitesten oral ziehen sich die latero-ventralen Gruppen. Die Zellen des Nucl. magnocellularis sind die größten Zellen des Diencephalon. Sie sind polygonal, färben sich stark und haben einen großen exzentrisch liegenden Kern. Sie enthalten eine große Menge chromatophiler Substanz, die diffus in der Zelle gelegen ist.

Erst im mittleren Drittel der Commissura media (Fig. 24) erscheint der Nucl. medianus thalami (n mdn). Er ist paarig nur in seiner dorsalen Par-

tie und auch nur anfänglich. Ventral verschmelzen die beiden symmetrisch gelagerten Kerne zu einer Zellensäule. Der Nucl. medianus füllt denjenigen Raum aus, der zwischen den medialen Partien der beiden Nucl. communes liegt, und den wir bei der Beschreibung des Nucl. communis erwähnt haben. Wenn der Nucl. medianus den Nucl. reuniens berührt, vergrößert er sich bedeutend und bildet hier ein großes rundliches Zellenkonglomerat (Fig. 24). Die Verkleinerung des Nucl. medianus geht in der Weise vor sich, daß sein mittlerer dünner Teil (Fig. 24) in kleine Gruppen von je 5—6 Zellen zerfällt und verschwindet. Daher besteht jetzt der ganze Kern aus einer dorsalen und einer ventralen Partie. In den oralsten Schnitten (Fig. 28) ist der Nucl. medianus nur durch die dorsale Zellengruppe vertreten; er verschmilzt jetzt mit dem Rest des hier medial gelegenen Nucl. reuniens. Der Nucl. medianus ist besser auf etwas überfärbten Präparaten zu sehen. Der Zellencharakter ist derselbe wie beim Hunde.

Die einzelnen Züge und Inseln des Nucl. reuniens erscheinen mehr kaudal und lagern sich vorwiegend zwischen den einzelnen Teilen des Nucl. communis (Fig. 12). Der kaudale Teil des Nucl. reuniens liegt inmitten der Zellen des Nucl. communis und ist enorm entwickelt. Im Niveau der beginnenden Commissura media (Fig. 16) gruppieren sich die Zellen des Nucl. reuniens in einer besonders breiten Schicht. Diese Schicht liegt schief und hat eine Form, die man vielleicht am besten mit einer Granate vergleichen könnte. Die Spitze dieser Granate ist gegen die Mittellinie gerichtet. Infolge der starken Färbung ist diese Schicht schon mit bloßem Auge wahrzunehmen. Weiter oral zerfällt diese Schicht in einzelne Reihen. Die ventro-lateralen bilden zusammen einen Zug, der fast bis zur Mittellinie reicht (Fig. 20) und sich durch einzelne Zellenreihen mit dem Nucl. reuniens der entgegengesetzten Seite verbindet.

Die Zellen der kaudalen Partie des Nucl. reuniens sind größer und reicher an chromatophiler Substanz als diejenigen der oralen. Schon Malone (37) spricht sich auf Grund dieses auch beim Menschen ausgeprägten Unterschiedes folgendermaßen aus: »Daß der Nucl. reuniens einen absolut einheitlichen Kern darstellt, ist unwahrscheinlich, weil der Zellencharakter sich an Stellen nicht unerheblich ändern kann« (s. 16). Ich kann mich dieser Meinung nur anschließen und komme noch auf diese Frage zurück.

Literatur. C. Vogt (55) teilt den Thalamus (zusammen mit dem Metathalamus) des Affen nach myeloarchitektonischem Prinzip in 41 verschiedene Zentren. Schon daraus ist

es zu ersehen, daß die Homologisierung der Vogtschen Zentren mit den Kernen meiner Schilderung unmöglich ist. — Die große Entwicklung der Commiss. med. beim Macacus hat Jacobsohn (30) betont. Er hat auch erwähnt, daß das Grau der Commiss. med. aus mehreren Kernen besteht. Einer von diesen Kernen liegt in der Mitte und bildet eine Raphe der Commiss. med., womit Jacobsohn offenbar den Nucl. medianus (mihi) gemeint hat.

Die Bezeichnung »Pulvinar« kann nur in der makroskopischen Anatomie gebraucht werden. Auf den mikroskopischen Präparaten läßt sich ein solches Gebiet als besonderer Kern nicht abgrenzen. Wie ältere Autoren (Luys, Forel), so betrachten auch die neueren (von Monakow, da Fano, Malone) das Pulvinar als eine Fortsetzung des äußeren bzw. lateralen Kernes. — von Monakow (44) spricht sich über das Grau der äußeren Gitterschicht beim Menschen folgendermaßen aus: ».... diese Partie des lateralen Kernes wird als Gitterschicht bezeichnet« (S. 87). Auch Malone (37) rechnet die äußere Gitterschicht zum Nucl. communis.

Der Nucl. communis besteht beim Menschen (Malone) aus denselben Teilen wie beim Affen. — Es ist bemerkenswert, daß der Nucl. magnocell. des Menschen seiner Lage nach dem homonymen Kern des Hundes und nicht des Affen entspricht. — Der wichtigste Unterschied zwischen den Thalamuskernen des Menschen in der Maloneschen Beschreibung und denjenigen des Macacus besteht, soviel ich sehe, darin, daß beim Macacus der Nucl. parvocellularis thalami Malone (der dem Centre médian von Luys entspricht) nicht vorhanden ist. Nach Sachs (50) läßt sich das Centre médian bei den niedrigen Affen nur schwer abscheiden.

### Substantia grisea des 3. Ventrikels.

Diese graue Masse (sg, Fig. 12 und 16) besteht aus kleinen, blassen, birnenförmigen und dreieckigen Zellen. Wie bei allen vorher beschriebenen Tieren, bildet auch beim Affen das zentrale Höhlengrau des unteren Teiles des 3. Ventrikels die untere Etage der Commissura media (Fig. 20 und 24).

### Hypothalamus.

Im Vergleich mit den vorherbeschriebenen Tieren ist der Nucl. peripeduncularis lateralis (n p pel) beim Affen schwach ausgebildet (Fig. 4, 8 und 12). Die Substantia nigra (s n) dagegen ist enorm entwickelt (Fig. 4, 8 und 12), weist dicke und knospenartige Fortsätze (Fig. 8) auf und läßt sich auf weit mehr Schnitten als bei den übrigen Tieren verfolgen. Im Gegensatz zu den Zellen des Hundes weisen die der Substantia nigra des Affen die Eigentümlichkeit auf, daß einige von ihnen, die durch die Fasern nicht beengt sind, deutliche Schollen enthalten.

Der Nucl. hypothalamicus (n hpth) ist topographisch sehr klar abgegrenzt und erreicht beim Macacus einen großen Umfang (Fig. 16 und 20). Er übersteigt diesen Kern beim Hunde an Länge, Breite und hauptsächlich

an Höhe. Er besteht aus einer großen Anzahl drei- und viereckiger intensiv sich färbender Zellen. Das Protoplasma ist ganz homogen. — In seinem kaudalen Abschnitte liegt der Nucl. hypothalamicus lateral und etwas dorsal von der Substantia nigra (Fig. 16). Seine dorsale Seite ist weniger als beim Hunde gewölbt. Sein mediales Ende, das sich basalwärts umbiegt, ist dünner als das laterale (Fig. 20). Im Niveau der Pars dorsalis des Nucl. communis fängt der Nucl. hypothalamicus rasch an sich zu verkleinern.

Im kaudalen Teile des Diencephalon grenzt das Griseum subthalamicum (gr sbth) ventral an die Substantia nigra, dorsal an den Nucl. communis und medial an die Mittellinie bzw. an das zentrale Höhlengrau (Fig. 12 und 16). Einige Zellen des Griseum subthalamicum sammeln sich in einen Zug, der basalwärts zieht. Im Mittelpunkte des Griseum subthalamicum liegt auf den kaudalen Schnitten die kleinzellige, beim Affen stark entwickelte Partie des Nucl. ruber (Fig. 12). Die Zellen des Griseum subthalamicum sind in ihrer Form und Größe ziemlich schwankend. Wie beim Hunde, kommen inmitten der Zellen mit homogenem Protoplasma auch drei- und viereckige, deutliche Schollen zeigende Zellen vor, die sich ihrer Struktur nach den motorischen Zellen nähern. Die Zahl solcher Zellen ist bald kleiner, bald größer.

Besonders zahlreich kommen sie auf mehr oralen Schnitten der ventromedialen Partie (Fig. 20) vor. Hier bilden sie zuweilen Gruppen von 5 bis 7 Zellen. Auf oralen Schnitten dringen aus dem Griseum subthalamicum große runde Zellen in das Zentrale Grau, die ganz homogenes Protoplasma haben und sich dem Rand des 3. Ventrikels entlang gruppieren.

Der Nucl. medialis des paarigen Corp. mamillare (n m c mam) ist beim Macacus mehr kaudal als der Nucl. lateralis (n l c mam) gelagert (Fig. 12), er ist ausgezeichnet abgegrenzt und größer als beim Hund. Die Zellen des Nucl. medialis liegen dicht an der Peripherie des Kernes und bilden hier eine Kapsel. Zunächst liegt der Nucl. medialis in einem scharfen Winkel zum gleichnamigen Kern der entgegengesetzten Seite (Fig. 12), lagert sich ihm dann parallel (Fig. 16), ohne ihn aber zu berühren. Der Nucl. lateralis liegt zunächst latero-ventral vom medialen Kern. Die graue Masse, die lateral und dorsal vom Nucl. medialis gelegen ist, besteht beim Macacus aus denselben Zellen wie der Nucl. lateralis. Ich zähle daher dieses Grau zum Nucl. lateralis. So gestalten sich die Verhältnisse auch beim Menschen (Malone). Malone hat daher für den lateralen Kern den Namen Nucl.

mamillo-infundibularis vorgeschlagen. Latero-ventral vom Nucl. medialis lagert sich der Nucl. intercalatus (n i c mam, Fig. 16). Dieser Kern ist beim Affen zellenreicher als beim Hunde. Er hat dreieckige Gestalt, ist gut abgegrenzt und läßt sich auf 35 bis 40 Präparaten verfolgen. Der mediale Kern geht ohne scharfe Grenze in das Grau des Tuber über. Der laterale Kern erstreckt sich mehr oral als dieser und der Nucl. intercalatus; seine an der Peripherie liegenden Zellen sind ventral vom Nucl. hypothalamicus zu sehen. Die Zellen des Nucl. medialis sind rund und färben sich sehr schwach, diejenigen des lateralen Kernes sind größer, dreieckig und färben sich stärker. Die Zellen des Nucl. intercalatus sind polygonal und färben sich intensiv, aber ich habe in ihnen die Schollen nicht so deutlich wie beim Hunde gesehen.

Literatur. Nach Forel (21) ist beim Affen (Hapale) der Nucl. hypothal. ebenso deutlich wie beim Menschen abgegrenzt; ein unwesentlicher Unterschied besteht nur in der Form. Nach Sano (51) soll der Nucl. hypothal. beim Macacus nur ziemlich deutlich abgegrenzt sein.

Henle (26) erwähnt 3 Kerne im menschlichen C. mamill., er beschreibt sie jedoch nicht. Malone (37) hat meines Wissens nach zuerst den dritten Kern des C. mamill. beim Menschen beschrieben.

Wie bei den vorher beschriebenen Tieren halte ich es auch hier für zweckmäßig, meine Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammenzustellen:

Metathalamus.

Nucl. corp. gen. med.
Nucl. principalis corp. gen. lat.
Nucl. magnocellularis corp. gen. lat.

Epithalamus.

Nucl. medialis des Gangl. habenulae
Nucl. lateralis des Gangl. habenulae

Thalamus.

Nucl. communis — Pars dorsalis, Pars lateralis, Pars medialis, Pars ventralis.
Nucl. magnocellularis thalami.
Nucl. medianus thalami.

Substantia grisea des 3. Ventrikels.

Hypothalamus.

Nucl. hypothalamicus.
Griseum subthalamicum.
Nucl. medialis corp. mamillaris.
Nucl. lateralis corp. mamillaris.
Nucl. intercalatus corp. mamillaris.

## Vergleichend-anatomische Ergebnisse.

Es scheint mir zweckmäßig zu sein, die vergleichend-anatomischen Folgerungen in derselben Reihenfolge zu schildern, in der ich die Kerne jedes Tieres beschrieben habe.

Metathalamus.

Je höher das Tier steht, desto geringer ist im Vergleich zur Größe seines Thalamus die Größe des Nucl. corp. gen. med. Den im Vergleich zum ganzen Thalamus größten Umfang erreicht er beim Igel, bei dem er sich nahezu als der größte Kern des ganzen Diencephalon darstellt. Bekanntlich gehört der Igel zu den Tieren mit schwach entwickeltem Schapparat. Da wir anzunehmen haben, daß der Nucl. corp. gen. med. zu den Gehörzentren gehört (von Monakow (42), von Bechterew (4), Cajal (11 und 12), Forel (20) u. a.), und es anderseits festgestellt ist, daß auch andere Tiere mit rudimentärem Auge, bzw. ganz blinde Tiere, wie der Maulwurf (Forel (20), Ganser (23)) und die Blindmaus (von Frankl-Hochwart (20)), ein sehr großes Corp. gen. med. besitzen, so muß anerkannt werden, daß die große Entwicklung des Nucl. corp. gen. med. beim Igel mit der stärkeren Entwicklung seines Gehörsinnes im Zusammenhang steht. — Dem Nucl. corp. gen. med. des Igels entsprechen dem Zellencharakter nach die gleichnamigen Kerne des Hundes und des Affen und der Nucl. ventralis corp. gen. med. des Kaninchens. Beim letzteren finden wir jedoch noch 2 andere Kerne: den Nucl. dorsalis corp. gen. med. und den Nucl. suprageniculatus, während sich bei andern Tieren von diesen 2 Kernen nicht die geringste Spur findet. Der Zellencharakter dieser Kerne unterscheidet sich von dem-

jenigen des Nucl. ventralis so stark, daß seine Elemente wahrscheinlich auch andere spezielle Funktion haben, als die des ventralen Kerns, über die wir aber keinerlei Vermutung aufstellen können. Nach Cajal (11) soll der Nucl. dorsalis durch die Guddensche Commissura mit dem gleichnamigen Kern der entgegengesetzten Seite verbunden sein. Nach Münzer und Wiener (45) und wohl auch nach Nißl (47) bleibt der Nucl. supragenículatus bei totaler Exstirpation der Hirnrinde ganz intakt.

Die graue Substanz des Corp. gen. lat. setzt sich beim Igel und beim Kaninchen aus 2 Teilen zusammen: aus dem Nucleus und dem Ventralen Grau des Corp. gen. lat. Der Unterschied des Zellencharakters dieser grauen Massen ist derart bedeutend (besonders beim Igel), daß wahrscheinlich eine physiologische Verschiedenheit sich hinter ihm verbirgt. Schon beim Hunde ist das Ventrale Grau weniger entwickelt, beim Affen fehlt es ganz. Im Gegensatz dazu ist der Nucl. corp. gen. lat. beim Igel nur schwach entwickelt und beim Kaninchen groß. Beim Hunde und beim Affen weist der ihm entsprechende Nucl. principalis corp. gen. lat. in seiner Entwicklung keinerlei Eigentümlichkeiten auf (natürlich abgesehen von Lage, Schichtung usw.), es tritt jedoch bei diesen 2 Tieren im äußeren Kniehöcker noch ein neuer Kern auf — der Nucl. magnocellularis des Corp. gen. lat. Beim Hunde sind die Zellen dieses Kernes teilweise noch zwischen denjenigen des Nucl. principalis gelagert, und der ganze Kern besitzt noch keine scharfe topographische Abgrenzung. Beim Affen erreicht der Nucl. magnocellularis eine größere Entwicklung als beim Hunde und enthält eine ganz bestimmte topographische Absonderung.

In der aufsteigenden Reihe vergrößert sich somit der beim Igel noch geringfügige Nucl. corp. gen. lat., und gewisse Komplexe seiner Zellen differenzieren sich bei den höheren Tieren zu einem besonderen Kern. Dieser stärkeren und komplizierteren Entwicklung des Nucl. corp. gen. lat., die wahrscheinlich mit dem stärkeren Sehvermögen höherer Tiere zusammenhängt (nach Edinger (15) soll die Sehrinde des Affen sogar größer als die des Menschen sein), geht ein Verkleinerungsprozeß des Ventralen Graus bis zum gänzlichen Verschwinden (Affe) parallel.

Diese Tatsachen können wir besser verstehen, wenn wir noch die Ergebnisse der experimentell-anatomischen Untersuchungen heranziehen. Da ich diese Ergebnisse auch in weiterem zu Hilfe nehmen werde, so scheint es mir zweckmäßig, hier in aller Kürze die Beziehungen anzudeuten,

in der die erwähnten Resultate, soweit sie uns heute gegeben sind, verwertet werden können.

Die mehr auf spekulativem Wege gewonnene Meinung von Luys (36) über die Beziehungen des Thalamus zur Hirnrinde im allgemeinen und jedes einzelnen Thalamusteils zu gewissen Rindenteilen im besonderen, hat ihre Bestätigung in den Versuchen von v. Gudden und hauptsächlich von v. Monakow (40—44) gefunden. Letzterer bestätigte die Richtigkeit des von Guddenschen Satzes, daß »die Kerne des Thalamus zum Teil unabhängig von der Großhirnrinde sind«, und teilte alle Diencephalonkerne in drei Hauptgruppen ein: 1. die Kerne bzw. das Grau, das bei Totalexstirpation des Großhirns intakt bleibt, 2. partiell von der Hirnrinde abhängige Kerne, die teilweise und schwach bei der Entfernung der Rinde in Mitleidenschaft gezogen werden (indirekte Großhirnteile von Monakows) und 3. ganz abhängige und bei der Entfernung der Hemisphäre ganz zugrunde gehende (direkte Großhirnteile nach von Monakow). Dieser gewonnene Grundsatz scheint mir das wichtigste und fruchtbarste Ergebnis der experimentellen Arbeiten zu sein. Wollte man aber an der Hand dieses von v. Monakow festgestellten und von anderen Autoren bestätigten Hauptsatzes eine Beantwortung der Frage nach dem Verhältnis jedes einzelnen Kernes zur Hirnrinde finden, so würde ein solcher Versuch in bezug auf eine ganze Reihe von Kernen erfolglos bleiben. Der Grund hierfür liegt darin, daß die Experimente von v. Monakow an Kaninchen (40) in die achtziger Jahre des verflossenen Jahrhunderts fallen, also in eine Zeit, in der der Bau des Kaninchenthalamus in seinen Details noch unbekannt war. Versuche anderer Autoren, die ebenfalls an Kaninchen angestellt und auf den nach Nißlschem Verfahren hergestellten Präparaten kontrolliert wurden, sind ihrer Zahl nach sehr gering; es existiert meines Wissens nur je ein Versuch mit fast totaler Exstirpation der Hirnrinde von Nißl (46) und von Münzer und Wiener (45), außerdem stimmen die Ergebnisse dieser Experimente nicht durchweg überein. Größere Zuverlässigkeit kommt den von Monakowschen Experimenten am Hunde zu, da die grundlegende Einteilung der Thalamuskerne dieses Tieres von ihm stammt[1].

[1] Die Kerne des Affenthalamus sind auf ihre Beziehung zur Rinde nur teilweise untersucht worden (von Monakow); der Igel hat meines Wissens noch nie den Gegenstand einer derartigen Untersuchung gebildet.

Außerdem muß man bedenken, daß selbst eine ganz unzweideutige Beziehung eines Kernes zu einem bestimmten Rindenteil nur in äußerst wenigen Fällen die physiologische Funktion dieses Kernes andeutet, die Unabhängigkeit eines Kernes von der Rinde aber zu gar keinem Schluß auf seine spezielle physiologische Funktion berechtigt.

Wenn wir jetzt von dieser Darlegung, die in unserer Darstellung einen größeren Raum einnehmen mußte, zu der oben begonnenen Frage nach den Kernen des Corp. gen. lat. zurückkehren, so sind die Ergebnisse der experimentellen Arbeiten in bezug auf diese Kerne durchaus feststehend. So hat schon Forel, hauptsächlich aber von Monakow (40 u. 43), auch Nißl (46), Münzer und Wiener (45), Bell (5) gezeigt, daß bei der Entfernung der Okzipitalrinde, ja selbst der ganzen Hemisphäre des Kaninchens bzw. des Hundes, das Corp. gen. laterale ventrale, das zweifellos dem Ventralen Grau (mihi) entspricht, intakt bleibt, der Nucl. corp. gen. lat. (bzw. der Nucl. principalis und der Nucl. magnocellularis corp. gen. lat.) dagegen ganz zugrunde geht. Vergleichen wir diese experimentellen Ergebnisse mit meinen vergleichend-anatomischen, so gelangen wir zu dem Schlusse, daß, je höher das Tier steht, desto größer und komplizierter die graue Substanz des Corp. gen. lat. erscheint, die mit der Rinde verbunden ist, und desto kleiner bis zum völligen Verschwinden die graue Masse ist, die von der Rinde unabhängig ist. Das »Ventrale Grau« des Corp. gen. lat. ist wahrscheinlich ein selbständiges, endgültiges Sehzentrum (»Endkern« im Sinne von Monakow). Die Tatsache, daß es wie auch die Zellen des vorderen Zweihügels bei der Entfernung des Großhirns intakt bleiben, erklärt vielleicht dasjenige Sehvermögen, daß einige Autoren den großhirnlosen kleinen Tieren (z. B. den Kaninchen) zuschreiben möchten (s. Christiani (12)).

## Epithalamus.

Die graue Substanz des Ganglion habenulae besteht bei allen von mir untersuchten Tieren aus zwei Kernen: dem Nucl. medialis und dem Nucl. lateralis. Der Unterschied zwischen den einzelnen Tieren besteht nur in der Entwicklung des Nucl. medialis. Je niedriger das Tier steht, desto stärker ist der Nucl. medialis sowohl an Größe wie an Ausdehnung entwickelt. Was die absolute Größe des Nucl. lateralis anbelangt, so wächst

er in der aufsteigenden Tierreihe. Sein Größenverhältnis zum ganzen Thalamus bleibt stets dasselbe.

Die physiologische Bedeutung beider Kerne des Ganglion habenulae, das zu den phylogenetisch ältesten Teilen des Zentralnervensystems gehört, ist noch wenig aufgeklärt. Das physiologenetische hohe Alter des Ganglion habenulae zeigt sich bei den Säugetieren daran, daß bei totaler Exstirpation der Hirnrinde beide Kerne des Ganglion habenulae intakt bleiben (von Monakow, Münzer und Wiener). Nach den interessanten Untersuchungen von Bianchi (6) sind die Zellen des Ganglion habenulae beim Kaninchenembryo schon differenziert, wenn die übrige graue Masse des Thalamus noch undifferenziert erscheint.

Bekanntlich war Edinger (14) früher geneigt, den Nucl. medialis als ein Geruchszentrum anzusehen; nach den Untersuchungen von Lotheisen (34) modifizierte er jedoch seine Meinung dahin, daß der Nucl. medialis als ein Zentrum derjenigen Sinne zu betrachten sei, die er unter dem Namen »Oralsinn« zusammenfaßt (14) und unter denen vielleicht auch der Geruch eine Rolle spielt. Auch meine Ergebnisse sprechen vielleicht zugunsten dieser letzteren Auffassung. Der Oralsinn ist vermutlich bei den Insektivoren sehr stark entwickelt[1]. Ein so scharfer Beobachter wie von Gudden (24) spricht sich über diese Tiere folgendermaßen aus: »Hierzu kommt, daß der Geruchssinn bei vielen Tieren noch andere wichtige Leistungen zu vollziehen hat, ja daß bei einzelnen derselben, wie z. B. dem Igel, dem Maulwurf, der Blindmaus, sich in ihm und dem Nervus quintus der größte Teil des sogenannten »psychischen« Lebens konzentriert[2].«

Der Nucl. lateralis des Ganglion habenulae steht nach Edinger (14) in Beziehung zum Parietalorgan; er muß aber noch andere Funktion haben, da er bei den Säugetieren gut entwickelt ist, trotzdem bei ihnen das Vorhandensein des Nerv. parietalis noch nicht erwiesen ist. Dieser Meinung ist auch Edinger (14).

Während fast alle Autoren dem Ganglion habenulae auf jeden Fall die Rolle eines Sinneszentrums zuschreiben, steht die Meinung Cajals (11), der diesem Ganglion eine motorische Funktion zuschreiben möchte, ziemlich vereinzelt da (dieser Meinung scheint sich von Bechterew (4) anzu-

[1] Auch der Lobus parolfactorius ist beim Igel enorm entwickelt (Edinger).

[2] Es ist interessant, wie schon von Gudden mit dieser scharfsinnigen Bemerkung den Sinn der Edingerschen Theorie angedeutet hat.

schließen). Da ich keine motorischen Zellen im Ganglion habenulae gesehen habe, möchte ich mich gegen die Meinung des berühmten spanischen Forschers aussprechen.

### Thalamus.

Ein Kern, der bei allen von mir untersuchten Tieren vorhanden ist, ist der Nucl. medianus. Dieser Kern bewahrt seine typische Lage bei allen Tieren, nur seine Größe und Ausdehnung nehmen mit dem Aufsteigen in der Tierreihe ab. Dieser Kern gehört wahrscheinlich zu den phylogenetisch ältesten: er bleibt bei gänzlicher Exstirpation der Hirnrinde intakt (Nißl, Münzer und Wiener). Cajal (11) ist geneigt, ihm sensible Funktionen zuzuschreiben.

Beim Igel liegt zu beiden Seiten des Nucl. medianus der Nucl. paramedianus mit der für ihn charakteristischen lockeren Lagerung der großen Zellen. Bei keinem der übrigen Tiere fand ich einen homologen Kern. Auch in der mir zugänglichen Literatur finde ich weder anatomische noch physiologische Hinweise auf diesen Kern.

Ebenso findet sich für den Nucl. cuneiformis kein Homologon. Wie ich im beschreibenden Teile ausgeführt habe, tritt beim Hunde und nicht so deutlich beim Affen im oralen Drittel des Thalamus inmitten der lateralen Partie des Nucl. communis ein bald mehr, bald weniger scharf topographisch abgegrenzter Abschnitt hervor, der in seiner Form an den Nucl. cuneiformis in seinem vorderen Drittel erinnert. Während aber der Nucl. cuneiformis sich aus äußerst kleinen Zellen zusammensetzt, die kleiner sind als die des Nucl. communis, unterscheiden sich die in dem eben erwähnten Kernabschnitte gelegenen Zellen beim Hunde und beim Affen nicht von den gewöhnlichen Zellen des Nucl. communis. (Beim Affen liegen in diesem Abschnitte auch einige Zellen des Nucl. reuniens.) — Nicht die ähnliche topographische Lage der Kerne, sondern nur ihr Zellencharakter ist für die Frage der Homologisierung der Kerne in letzter Linie entscheidend. Mit anderen Worten: die Kerne verschiedener Tiere können nur dann als homolog angesehen werden, wenn sie in entsprechenden Partien des Thalamus gelagert, ungefähr den gleichen Zellencharakter aufweisen. Und umgekehrt können die Kerne, die im Diencephalon verschiedener Tiere zwar dieselbe Lage einnehmen, aber aus verschiedenen Zellen bestehen, nicht als homolog angesehen werden, wenn man die Aufgabe der Homologisierung

nicht in einem Vergleich nur äußerlich ähnlicher Partien des Thalamus erblickt, sondern im Vergleich von Zellenkomplexen mit gleichem Zellencharakter, in dem eine und dieselbe Funktion zu anatomischem Ausdruck gelangt.

Der Nucl. praebigeminalis ist nur beim Kaninchen und beim Igel vorhanden. Dieser Kern bleibt bei fast totaler Exstirpation der Hirnrinde ganz intakt (Nißl (46), Münzer und Wiener (45)). Nach Cajal (11) steht dieser Kern im »Kontakt« mit den Fasern der Nervi optici und der medialen Schleife. Der Nucl. anterior ist nur beim Kaninchen und beim Hunde vorhanden, bei letzterem ist er schwächer entwickelt als beim ersteren. Möglicherweise steht dieser Kern, wie es schon Luys (36) vermutet hat, in Beziehung zu dem stark entwickelten Geruchssinn dieser Tiere. Dieser Kern erleidet bei Exstirpation der Hirnrinde beim Hund fast keine Veränderung (von Monakow (43)).

Die Hauptpartie des Nucl. reuniens erscheint beim Igel und beim Hund in Gestalt eines schmalen, sich durch die Commissura media ziehenden Bandes. Beim Affen besteht der Nucl. reuniens aus diesem Band und einer stark entwickelten, im kaudalen Teile des Thalamus gelegenen Partie. Es ist dem Zellencharakter nach noch fraglich, ob diese kaudale Partie dieselben Funktionen wie die orale erfüllt. Künftige Versuche nach dem von Guddenschen Verfahren werden vielleicht Licht in diese Frage bringen. Das Verhältnis des Nucl. reuniens zur Hirnrinde wurde bis jetzt noch nicht untersucht, da der Kern selbst in letzter Zeit bekannt geworden ist (Haller (25), Cajal (11), da Fano (18), Malone (37)). Außerdem ist dieser Kern bei dem häufigsten Objekt der experimentellen Untersuchung — dem Kaninchen — nicht vorhanden. — Unter dem Namen Nucl. reuniens beschreibt Edinger (14) einen mächtigen Kern, der bei Reptilien in der Massa intermedia (Commissura media der Säuger) gelegen ist. Ob dieser Kern bei Vögeln vorhanden ist, erwähnt Edinger nicht. Nach Abbildungen Edingers zu urteilen, ist dieser Kern bei den Fischen nicht vorhanden. — Bei den von mir untersuchten Tieren konnte ich einen selbständigen, dem Nucl. reuniens der Reptilien entsprechenden Kern nicht finden. Wenn wir im Zentrum der Commissura media ein Gebild antreffen, das nach seiner Lage dem Edingerschen Nucl. reuniens entspricht, so handelt es sich nicht um einen selbständigen Kern, sondern um ein Konglomerat sich mischender Zellen des Nucl. medianus, des Nucl. reuniens der Säuger und des Griseum ventriculare.

Der Nucl. communis ist der zweite Kern (der erste ist der Nucl. medianus), der bei allen von mir untersuchten Tieren vorhanden ist, wenn auch die Entwicklung und die Zahl seiner Teile bei verschiedenen Tieren verschieden ist. — Beim Igel besteht dieser Kern aus einem großen ventralen und einem kleinen latero-dorsalen Teil. Die Entwicklung des Kernes in der aufsteigenden Tierreihe geht folgendermaßen vor sich. Die bei dem Igel noch fehlende mediale Partie erscheint schon beim Kaninchen und ist beim Hunde und beim Affen verhältnismäßig größer. Während bei diesen beiden Tieren die mediale Partie des Nucl. communis der Mittellinie zwar nahekommt, sie aber niemals übersteigt, geht sie beim Kaninchen im oralen Drittel des Thalamus in Gestalt eines breiten Gürtels auf die entgegengesetzte Seite über. Ebenso gehen beim Kaninchen auch einzelne Züge der ventralen Partie des Nucl. communis auf die entgegengesetzte Seite über. Somit liegt beim Kaninchen ein Teil des Nucl. communis in der Mitte der Commissura media, und die beiden Nucl. communes verschmelzen teilweise, während bei den übrigen Tieren dieser Kern sich nicht mit dem gleichnamigen Kerne der entgegengesetzten Seite berührt. — Die beim Igel noch geringfügige latero-dorsale Partie ist beim Kaninchen größer und besitzt beim Hunde im Vergleich mit den anderen Teilen eine erhebliche Ausdehnung. Eine besonders starke Entwicklung erreicht sie beim Affen, bei dem sie, okzipitalwärts sich verbreitend, das ganze Pulvinar der makroskopischen Anatomie bildet. Diese große Entwicklung beim Affen ist wahrscheinlich teilweise durch die intensivere Inanspruchnahme des Gesichtssinnes bedingt. Wenigstens hat von Monakow (43) bei einem Affen, dem Munk beide Sehsphären entfernt hat, partielle Atrophie des lateralen Teils des Nucl. lateralis gefunden.

Beim Affen erscheint auch eine bei den übrigen Tieren noch gänzlich fehlende neue Partie des Nucl. communis, die Pars dorsalis. Ihr Fehlen bei den niederen Tieren war schon Forel bekannt.

Die beim Igel und beim Kaninchen topographisch gut abgegrenzte Pars ventralis des Nucl. communis verliert ihre scharfe Begrenzung bei den höheren Tieren, bei denen sich in der Pars ventralis bzw. ihrem lateralen Teil ein neuer Kern, der Nucl. magnocellularis thalami, lagert. Diese ventrale Partie scheint mir die phylogenetisch älteste zu sein, und aus ihr und dem kleinen lateral-dorsalen Teile des Igels bildet sich in der aufsteigenden Tierreihe der große Nucl. communis, den

wir beim Affen antreffen. Für diese Vermutung spricht, wie ich glaube, folgendes. Der Nucl. ventralis ist nicht nur bei den Marsupialiern (Ziehen (57)), sondern schon bei den Reptilien und Vögeln (Edinger (14)) vorhanden. In diesem Nucl. ventralis der Reptilien will von Monakow (43) einen seinen ventralen Gruppen der Säuger (bzw. Pars ventralis Nucl. communis) entsprechenden Kern sehen; ich möchte mich dieser Meinung von Monakows anschließen. Außer der ähnlichen Lage spricht für diese Vermutung noch das, daß in dem Nucl. ventralis der Vögel der Tractus spino- und bulbothalamicus endet (Edinger), in dem entsprechenden ventralen Kern der Säuger die mediale Schleife, wie dies von v. Monakow (42) nachgewiesen und von Probst (49), von Münzer und Wiener und besonders von Cajal (11) bestätigt wurde. Bei den niedrigen Tieren spielt der Nucl. ventralis wahrscheinlich die Rolle einer Endstation, und seine »Endgültigkeit«, d. h. seine Selbständigkeit findet bei den Säugern ihren Ausdruck darin, daß dieser Kern bei totaler Exstirpation der Hirnrinde fast ganz intakt bleibt (von Monakow). Aus diesem phylogenetisch alten und selbständigen Teil haben sich die übrigen Teile des Nucl. communis entwickelt, die, wie es alle Autoren gezeigt haben, bei Entfernung der Hirnrinde ganz zugrunde gehen (direkte Großhirnteile, von Monakow). Der Nucl. communis ist somit ein Kern, dessen Entwicklung dem Aufsteigen in der Tierreihe bzw. der Entwicklung der Hirnrinde parallel geht.

Die graue Substanz der äußeren Gitterschicht besteht beim Hunde und beim Affen hauptsächlich aus Zellen, die sich vom lateralen Teil des Nucl. communis absondern, und aus einzelnen Zellen des Griseum subthalamicum, die von der basalen Seite her eindringen. Beim Igel und beim Kaninchen ist das Grau der Gitterschicht ebenso zusammengesetzt, nur in dem oralen Teile treten vereinzelt größere, intensiv sich färbende Elemente hervor.

Ein Teil der Zellen des Nucl. communis erreicht bei den höheren Tieren eine so erhebliche Größe, daß sie als selbständiger Kern — der Nucl. magnocellularis thalami — ausgeschieden werden müssen. Die Größe und der Reichtum an chromatophiler Substanz deuten wohl auf eine etwas andere spezielle Funktion dieser Zellen (Schaltzellen im Sinne von Monakows?). Auf das phylogenetisch junge Alter des Nucl. magnocellularis thalami weist vielleicht auch die Tatsache hin, daß er noch keine bestimmte topographische Lage einnimmt: beim Hund lagert er sich hauptsächlich im ventralen, beim Affen

im lateralen Teile des Nucl. communis. Beachtet man die Zellengruppe des Nucl. magnocellularis, die sich in dem latero-dorsalen Winkel der Pars lateralis des Nucl. communis beim Hund und beim Affen lagert (Fig. 19 und 20), und die Lage des Nucl. bicruralis (Nucl. magnocellularis Aut.) des Kaninchens (Fig. 18), so könnte man bei der Ähnlichkeit der Zellen beider Kerne vermuten, daß der Nucl. bicruralis möglicherweise die Ursprungsgruppe des Nucl. magnocellularis ist. Gleich dem Nucl. bicruralis gehen auch die eben erwähnten Gruppen des Nucl. magnocellularis bei Entfernung der Rinde ganz zugrunde (von Monakow (43), Nißl (46), Münzer und Wiener (45)). Ich will es nicht wagen, diese Frage endgültig zu entscheiden. Gegen diese Vermutung spricht der verschiedene Gruppierungscharakter der Zellen des Nucl. bicruralis und des Nucl. magnocellularis. In dem Nucl. bicruralis lagern sich nämlich die Zellen ziemlich dicht, in dem Nucl. magnocellularis dagegen zerstreut.

Die untere Etage der Commissura media wird bei allen von mir untersuchten Tieren von dem dorsalwärts sich erstreckenden Grau des 3. Ventrikels gebildet. In der oberen Etage lagert sich hauptsächlich der Nucl. medianus wie eine Raphe der Commissura media. Die Verbindung dieser beiden Etagen bildet bei allen Tieren, außer beim Kaninchen, der Nucl. reuniens; bei diesem liegt in der oberen Etage, wie schon erwähnt wurde, der Zellengürtel der Pars medialis des Nucl. communis. Bei anderen Tieren grenzt der innere Teil der Pars medialis an den Nucl. medianus und bildet so die Seitenteile des gesamten Graues, das in der Commissura media liegt.

Wenn auch das vergleichend-anatomische Studium auf die spezielle Funktion jedes einzelnen Kerns des Thalamus nur wenig Licht wirft, so kann man sich, wie ich glaube, mit größerem Recht über die primäre Funktion des ganzen Thalamus aussprechen. Wie Jacobsohn (28) gezeigt hat, haben die motorischen Zellen auf den nach Nißl gefärbten Präparaten so typische Struktur, daß sie fast immer erkannt werden können. Beim Durchsehen von Tausenden von Präparaten habe ich in der grauen Substanz des Thalamus nie eine motorische Zelle gesehen. Darum möchte ich mich gegen die motorische Funktion aussprechen, die ihm bekanntlich von v. Bechterew (4) zugeschrieben wird. Es ist hier nicht am Platze, die physiologischen Experimente von v. Bechterew und den Widerspruch, die sie gefunden haben, zu berühren. Ich will nur auf folgendes hinweisen. Forscher, die das Studium des Thalamus von den verschiedenen Stand-

punkten aus betrieben hatten — ich nenne nur die vergleichend-anatomischen Untersuchungen (Edinger), die morphologischen (Cajal, Malone, Lewandowsky), die physiologischen (Luziani (32), Abundo (1)), endlich die weitaus bedeutendsten Arbeiten von v. Monakow —, sprechen sich gegen die motorischen und zugunsten der sensorischen bzw. sensibeln Funktion des Thalamus aus. Dieser Meinung möchte ich mich anschließen.

Wie ich schon im Anfang dieser Arbeit bemerkt habe, haben frühere Forscher die Homologisierung der Thalamuskerne bei verschiedenen Tieren für fast unmöglich gehalten. Im Gegensatz dazu gelangt Sachs (50) in seiner 1909 veröffentlichten Arbeit, in der er die Ergebnisse seiner Untersuchungen auf nach Weigert-Pal gefärbten Schnitten über die Thalamuskerne von 34 Tieren (von den Marsupialiern bis zum Menschen) darstellt, zu folgenden Schlüssen: ». . . Kaum ein Hirnteil ist so uniform gebaut wie der Thalamus. Wenn man vom Centre médian absieht, finden sich die übrigen Kerne in vollkommener Deutlichkeit bei allen Tieren wieder.« Daß ich diese Schlüsse von Sachs für ganz unrichtig halten muß, ergibt sich aus meiner Darstellung.

### Substantia grisea des dritten Ventrikels.

Dieses Grau ist beim Igel und beim Kaninchen zellenreicher als beim Hunde und Affen. Die Zellenverminderung geschieht hauptsächlich auf Kosten der Zellen, die bei den niederen Tieren dem Rande des Ventrikels sehr nahe liegen. Darum bleibt beim Hunde und noch mehr beim Affen zwischen dem Ventrikel und der Substantia grisea des 3. Ventrikels ein fast zellenfreier Raum.

Die Funktion dieses uralten Grau es ist unbekannt. Es bleibt bei totaler Exstirpation des Großhirns ganz intakt (von Monakow, Münzer und Wiener). Auf Grund seiner erheblichen Entwicklung bei niederen Tieren darf man vermuten, daß es bei ihnen eine bedeutendere Funktion besitzt als bei den Tieren mit entwickelterem Großhirn. Über das Griseum ventrale der unteren Partie des 3. Ventrikels siehe oben.

### Hypothalamus.

Der Nucl. hypothalamicus findet sich als selbständiges Gebilde bei allen von mir untersuchten Tieren. Je höher das Tier steht, desto bedeutender ist sein Nucl. hypothalamicus, und um so größer ist der Raum, den

er einnimmt. von Monakow (43 u. 44) weist die Meinung, daß dieser Kern mit dem Nucl. opticus verbunden sei (Stilling, Bernheimer, Köl-liker u. a.) mit Entschiedenheit zurück und zeigt, daß der Nucl. hypothalamicus bei Entfernung der Hirnrinde intakt bleibt, bei Exstirpation der subkortikalen Ganglien des Vorderhirns dagegen zugrunde geht. Die Funktion dieses Kernes ist noch ganz unklar. Cajal (11) ist geneigt, ihm eine motorische Funktion zuzuschreiben. Auf Grund der Zellenstruktur möchte ich auch hier Cajal nicht beistimmen.

Im Griseum subthalamicum lassen sich einzelne Kerne bei keinem Tiere unterscheiden. Der Grund hierfür liegt darin, daß wegen der hier in allen Richtungen verlaufenden Fasern der Zellencharakter der meisten Zellen unklar wird. Der Meinung von v. Monakow, daß unsere Kenntnisse über diesen Teil des Diencephalon seit Forel fast keine Fortschritte gemacht haben, muß man jedenfalls beipflichten. Im allgemeinen läßt sich sagen, daß das Griseum subthalamicum um so zellenreicher ist, je niedriger das Tier steht. Beim Kaninchen läßt es sich in zwei rein topographische Gebiete einteilen, bei den übrigen Tieren ist selbst eine solche äußerliche Einteilung nicht möglich. Bei den höheren und weniger bei den niedrigeren Tieren trifft man unter den Zellen des Griseum subthalamicum bald vereinzelte, bald Gruppen von Zellen, die in ihrer Struktur sich den motorischen Zellen nähern. Nach Cajal (11) und Malone (27) soll ein Teil des Griseum subthalamicum als subordiniertes motorisches Zentrum angesehen werden können. Auch meine Ergebnisse sprechen vielleicht zugunsten einer solchen Auffassung. Auch das Verhältnis des Griseum subthalamicum zur Hirnrinde ist nicht klar, da auch in dieser Beziehung dieses Gebiet dem Studium schwer zugänglich ist.

Kerne, die im Corpus mamillare jedes von mir untersuchten Tieres stets angetroffen wurden, sind der Nucl. medialis und der Nucl. lateralis. Der Nucl. medialis wächst in der aufsteigenden Tierreihe, ohne in seinem Bau wesentliche Verschiedenheiten aufzuweisen. Kompliziertere Verhältnisse weist der Nucl. lateralis auf. Während beim Kaninchen und beim Igel die graue Masse, die sich dorsal und dorso-lateral vom Nucl. medialis lagert, aus gleichartigen, selbständigen Zellen besteht und eben darum von mir als besonderer Kern — Nucl. supramamillaris — ausgeschieden wurde, gehört beim Hunde ein Teil der Zellen dieser Masse dem Nucl. lateralis an, und sie setzt sich beim Affen ausschließlich aus Zellen des Nucl. late-

ralis zusammen. Beim Hund und beim Affen lagert sich in das Corpus mamillare ein bei den niedrigen Tieren nicht vorhandener Kern — der Nucl. intercalatus. Die physiologische Bedeutung dieses Kernes wie auch der übrigen Kerne des Corpus mamillare ist noch nicht festgestellt (s. von Bechterew (4)). Cajal (11) vertritt die Meinung, daß das Corpus mamillare ein Geschmackszentrum ist, und vergleicht es mit den Kniehöckern. Die Untersuchungsergebnisse über das Verhältnis des Corpus mamillare zur Hirnrinde stimmen bei den verschiedenen Autoren (von Gudden, von Monakow, Münzer und Wiener) nicht überein. Soweit ich auf Grund der mir zugänglichen Literatur schließen kann, gehören die Corpora mamillaria zu den indirekten Großhirnteilen im Sinne von Monakows.

Vergleichen wir die Tabellen der Kerne, die ich nach der Beschreibung jedes einzelnen Tieres aufgestellt habe, so ist unschwer zu erkennen, daß ein Teil der Kerne bei allen, ein anderer dagegen nur bei einigen Tieren vorhanden ist. Die bei allen Tieren vorhandenen Kerne möchte ich als Grundkerne des Diencephalon der Säugetiere, die übrigen als akzessorische Kerne bezeichnen. Natürlich spreche ich nur über die von mir untersuchten Tiere. Die Grundkerne werden durch den Nucl. corp. gen. med. (Nucl. ventralis corp. gen. med. beim Kaninchen), den Nucl. corp. gen. lat. (Nucl. principalis corp. gen. lat. der höheren Tiere), beide Kerne des Ganglion habenulae, den Nucl. medianus, den Nucl. communis (pars ventralis und latero-dorsalis), die Substantia grisea des 3. Ventrikels, den Nucl. hypothalamicus, das Griseum subthalamicum und die Nucl. medialis und lateralis des Corpus mamillare gebildet. Den Thalamus jedes einzelnen Tieres bilden die sämtlichen Grundkerne mit dem einen oder anderen akzessorischen. Diesen speziellen Bau des Diencephalon jedes einzelnen Tieres habe ich in folgender Tabelle zu veranschaulichen versucht.

Ein Teil der Grundkerne ist vom Großhirn unabhängig (beide Kerne des Ganglion habenulae, der Nucl. medianus, die Pars ventralis des Nucl. communis, das Griseum ventriculare?), ein anderer halb abhängig (beide Kerne des Corp. mamillare) und der dritte ganz abhängig (der Nucl. corp. gen. med., der Nucl. corp. gen. lateralis, der Nucl. hypothalamicus). In der aufsteigenden Tierreihe verkleinern und vermindern sich die Kerne des ersten Teiles (abgesehen vom Nucl. lateralis des Ganglion habenulae), einige Kerne des zweiten und dritten Teiles erscheinen bloß bedeutend vergrößert (z. B. der

| | Metathalamus | | | | Thalamus | | | | | | | | Hypothalamus | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Igel | — | — | Ventrales Grau des c. gen. lat. | — | N. praebigeminalis | N. paramedianus | — | — | — | — | — | N. reuniens thal. | N. supramamillaris | — |
| Kaninchen | N. suprageniculatus | N. dorsalis des c. gen. med. | Ventrales Grau des c. gen. lat. | — | N. praebigeminalis | — | N. cuneiformis | N. anterior | Pars medialis, N. communis | — | N. bicruralis thal.? | — | N. supramamillaris | — |
| Hund | — | – | Ventrales Grau des c. gen. lat. | N. magnocellularis des c. gen. lat. | — | — | — | N. anterior | Pars medialis, N. communis | — | N. magnocellularis thal. | N. reuniens thal. | — | N. intercalatus c. mamillaris |
| Affe | — | — | — | N. magnocellularis des c. gen. lat. | — | — | — | — | Pars medialis, N. communis | Pars dorsalis, N. communis | N. magnocellularis thal. | N. reuniens thal. | — | N. intercalatus c. mamillaris |

+ Grundkerne [1]

[1] Siehe S. 57.

Nucl. hypothalamicus, der Nucl. lateralis des Corp. mamillare), andere dagegen sind nicht nur größer, sondern ein Teil ihrer Zellen differenziert sich bereits zu neuen akzessorischen Kernen (der Nucl. corp. gen. lateralis, der Nucl. medialis corp. mamillare). Die akzessorischen Kerne, die von der Hirnrinde unabhängig sind, verkleinern sich oder verschwinden ganz (das Ventrale Grau des Corp. gen. lateralis, der Nucl. supragenieulatus, der Nucl. praebigeminalis), die halb abhängigen sind nur bei einigen Tieren vorhanden (z. B. der Nucl. anterior) und die ganz abhängigen vergrößern sich enorm bzw. es treten neue Teile und Kerne auf (der Nucl. magnocellularis corp. gen. lateralis, die Pars medialis, lateralis und dorsalis des Nucl. communis, der Nucl. magnocellularis thalamus und der Nucl. bicruralis). Über die übrigen akzessorischen Kerne besitzen wir keine experimentellen Erfahrungen.

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß der Thalamus (im engeren Sinne) eine komplizierte und variable Zusammensetzung aufweist. Es drängt sich die Frage auf, wie die morphologische Verschiedenheit des Thalamus bei den verschiedenen Tieren zu begreifen ist. Ein Versuch, diese Frage zu beantworten, müßte davon ausgehen, daß einige Sinne, wie der »Oralsinn«, der Geruch, der eine so enorme Rolle im Geschlechtsleben einiger Tiere spielt, vielleicht auch noch andere (das Gehör), bei den niedrigen Tieren stärker als bei den höheren entwickelt ist. Zu dieser Meinung neigen von Gudden, von Monakow, Edinger und andere. Vielleicht bildet ein Teil der Kerne etwa eines Kaninchens von der Hirnrinde wenig abhängige Zentra der bei diesem Tiere stärker entwickelten Sinne. Es ist auch möglich, daß einige im Thalamus niedriger Tiere anzutreffende und bei höheren spurlos verschwindende Kerne selbständige »Endkerne« für die Impulse aus dem Rückenmark darstellen. Bei den höheren Tieren verschwinden die Kerne beider Kategorien, einerseits deshalb, weil die Sinnesempfindungen selbst schwächer werden, hauptsächlich aber darum, weil sich die übergeordneten sensorischen und sensiblen Zentren in die Großhirnrinde translozieren. Jetzt ist somit das Thalamusgrau nicht mehr ein mehr oder weniger selbständiges Zentrum, sondern ein mächtiger Apparat, in dem die von der Peripherie kommenden Impulse zur Weiterleitung an die Hirnrinde umgeschaltet werden. Der Grund des bunten Baues des Thalamus liegt meiner Ansicht nach einerseits in seiner Fähigkeit zur verhältnismäßig raschen Akkomodation an die

Anforderung des peripherischen Nervensystems, anderseits in seinem enormen Unterworfensein unter die Hirnrinde[1].

Bei kleinen Tieren, bei denen der Thalamus selbständigere Funktionen übernimmt, zeigt sich dies anatomisch in einer großen Anzahl von der Hirnrinde unabhängiger bzw. wenig abhängiger Kerne; bei den höheren Tieren gelangt die vermittelnde Funktion des Thalamus in der Tatsache der enormen Entwicklung des Nucl. communis mit späterer Differenzierung neuer Kerne zum Ausdruck.

Vergleicht man den Prozeß, der im Thalamus vorgeht, mit dem, der sich in dem experimentell am meisten erforschten Corp. gen. laterale abspielt, so kommt man zu dem Ergebnis, daß es sich in beiden Fällen um einen und denselben Hauptprozeß handelt, nämlich um die Ersetzung des selbständigen Graues durch ein von der Hirnrinde abhängiges; ein prinzipieller Unterschied also in der Evolution des Thalamus und seines früh abgesonderten Teiles — des Corp. gen. laterale — ist nicht zu konstatieren.

Das eben Ausgeführte erhebt nicht den Anspruch darauf, als eine Theorie zu gelten. Dazu sind meine Untersuchungen, ebenso die experimentellen Ergebnisse, die ich herangezogen habe, nicht zahlreich genug. Die Aufgaben späterer vergleichend-anatomischer, experimenteller und embryologischer Untersuchungen würden darin bestehen, den Bau und die Funktion des Thalamus genauer zu ermitteln. Es versteht sich von selbst, daß eine genauere Differenzierung des Thalamusgraues in einzelne Kerne eine notwendige Voraussetzung dieser Untersuchungen ist. Einen solchen Versuch, die graue Substanz des Thalamus einiger Säugetiere zu differenzieren, habe ich in der vorliegenden Arbeit unternommen. Die dargestellten physiologischen Bemerkungen wollen nur als ein Versuch, die von mir beobachtete Verschiedenheit im Bau des Thalamus zu erklären, angesehen sein.

[1] Das erklärt vielleicht den Unterschied des Thalamusbaues bei Tieren derselben zoologischen Ordnung. Soweit ich aus Beschreibungen und Zeichnungen von Cajal (11) schließen kann, ist das Thalamusgrau des Meerschweinchens nicht ganz so wie das des mit ihm zur gleichen Ordnung gehörenden Kaninchens gebaut, sondern nimmt eine Mittelstufe zwischen ihm und dem Igel ein.

Daraus ergibt sich die Notwendigkeit eines vergleichenden anatomischen Studiums verschiedener Tiere gleicher Ordnung. So würde man mehr Übergangstypen gewinnen.

Ich kann meine Arbeit nicht abschließen, ohne meinem verehrten Lehrer, Hrn. Professor Dr. L. Jacobsohn, meinen tief empfundenen Dank für die Unterstützung bei der Arbeit durch bereitwilligste Überlassung seiner zahlreichen nach Weigert-Kulschitzky gefärbten Schnitte und für seine wertvollen Ratschläge, die mir die Aufgabe wesentlich erleichtert haben, auszusprechen.

## Literatur.

1. d'Abundo, La physiopathologie de la couche optique. Archives italiennes de Biologie, Teil LIII, Fasz. III.

2. Auerbach, Diskussion zum Vortrag Nißls, S. 46.

3. von Bechterew, Die Leitungsbahnen im Gehirn und Rückenmark. 1899.

4. Derselbe, Die Funktionen der Nervencentra. 1908.

5. Berl, Einiges über die Beziehungen der Sehbahnen zu dem vorderen Zweihügel beim Kaninchen. Arbeiten aus dem Neurologischen Institute an der Wiener Universität. 1902.

6. Bianchi, Anatomische Untersuchungen über die Entwicklungsgeschichte der Kerne des Thalamus des Kaninchens. Monatsschrift für Psychiatrie und Neurologie. 1909.

7. Bischoff, Beiträge zur Anatomie des Igelgehirns. Anatomischer Anzeiger. 1900.

8. Brauer, Die Substantia nigra Soemmeringii. Arbeiten aus dem Neurologischen Institut an der Wiener Universität, Bd. XVII, 1909.

9. Burdach, Vom Bau und Leben des Gehirns, Bd. II, 1822.

10. Ramon y Cajal, Beitrag zum Studium der Medulla oblongata. 1896.

11. Derselbe, Histologie du Système Nerveux Tome II. Paris 1911.

12. Derselbe, Die Endigung des äußeren Lemniscus oder die sekundäre akustische Nervenbahn. Deutsche Medizinische Wochenschrift. 1902.

13. Christiani, Zur Physiologie des Gehirns. 1885.

14. Edinger, Bau der nervösen Zentralorgane, I. und II. Bd. 1908.

15. Derselbe, Die Beziehungen der vergleichenden Anatomie zur vergleichenden Psychologie. 1909.

16. Edinger und Wallenberg, Untersuchungen über den Fornix und das Corpus mamillare. Archiv für Psychologie. 1902.

17. Ellenberger und Baum, Handbuch der vergleichenden Anatomie der Haustiere. 1909.

18. da Fano, Studien über die Veränderungen im Thalamus opticus bei Defektpsychosen. Monatsschrift für Psychiatrie und Neurologie. 1909.

19. Flatau und Jacobsohn, Handbuch der Anatomie und vergleichenden Anatomie des Zentralnervensystems der Säugetiere. 1899.

20. Forel, Beiträge zur Kenntnis des Thalamus opticus und der ihn umgebenden Gebilde bei den Säugetieren. Aus dem LXVI. Bande der Sitz.-Ber. d. k. Akad. d. Wiss. in Wien. 1872.

21. Derselbe, Untersuchungen über die Haubenregion usw. Archiv für Psychiatrie, 1877. Die beiden genannten Arbeiten von Forel sind in die »Gesammelten hirnanatomischen Abhandlungen«, München 1907, aufgenommen.

22. von Frankl-Hochwart, Zur Kenntnis der Anatomie des Gehirns der Blindmaus. Arbeiten aus dem Neurologischen Institut an der Wiener Universität. 1902.

23. Ganser, Vergleichend anatomische Studien über das Gehirn des Maulwurfs. Morphologisches Jahrbuch, Bd. 7.

24. von Guddens gesammelte und hinterlassene Abhandlungen. 1889.

25. Haller, Vom Bau des Wirbeltiergehirns, Teil III. Morphologisches Jahrbuch, Bd. 28.

26. Henle, Grundriß der Anatomie des Menschen, bearbeitet von Merkel, 1908.

27. Hermann, Lehrbuch der Physiologie. 1910.

28. Jacobsohn, Über die Kerne des menschlichen Hirnstammes. Aus dem Anhang zu den Abhandlungen der Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. 1909.

29. Derselbe, Struktur und Funktion der Nervenzellen. Neurologisches Zentralblatt. 1910. Nr. 20.

30. Derselbe, Diskussion zum Vortrag Ziehens, Neurologisches Zentralblatt. 1908. S. 652.

31. Kölliker, Handbuch der Gewebelehre, II. Band. 1896.

32. Lewandowsky, Untersuchungen über die Leitungsbahnen des Truncus cerebri usw. Jena 1904.

33. Luciani, Physiologie des Menschen. 1907. Bd. III.

34. Lotheisen, Über die Stria medullaris thalami optici usw. Anatomische Hefte. 1894. IV. Bd., Heft II.

35. Luys, Iconographie photographique des Centres nerveux. Paris 1873.

36. Derselbe, Das Gehirn. Autorisierte Ausgabe. 1877.

37. Malone, Über die Kerne des menschlichen Diencephalon. Aus dem Anhang zu den Abhandlungen der Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. 1910.

38. Martin, Lehrbuch der Anatomie der Haustiere. 1900.

39. Meynert, Vom Gehirn der Säugetiere. Strickers Handbuch, Bd. II. 1872.

40. von Monakow, Über einige durch Exstirpation zirkumskripter Hirnrindenregionen bedingte Entwicklungshemmungen des Kaninchenhirns. Archiv für Psychiatrie, Bd. XII. 1881.

41. Derselbe, Experimentelle und pathologisch-anatomische Untersuchungen über die Beziehungen der sogenannten Sehsphäre zu den infrakortikalen Optikuszentren. Archiv für Psychiatrie, Bd. XIV. 1883.

42. Derselbe, Neue experimentelle Beiträge zur Anatomie der Schleife. Neurologisches Zentralblatt. 1885.

43. Derselbe, Experimentelle und pathologisch-anatomische Untersuchungen über die Haubenregion, den Sehhügel und die Regio subthalamica usw. Archiv für Psychiatrie, Bd. XXVII. 1895.

44. Derselbe, Gehirnpathologie. 1905.

45. Münzer und Wiener, Das Zwischen- und Mittelhirn des Kaninchens usw. Monatschrift für Psychiatrie und Neurologie. 1902.

46. Nißl, Die Kerne des Thalamus beim Kaninchen. Tageblatt der 62. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Heidelberg. 1889. Zitiert auch in Köllikers Handbuch Bd. II, S. 540.

47. Derselbe, Über eine neue Untersuchungsmethode des Zentralorgans usw. Zentralblatt für Nervenheilkunde und Psychiatrie. 1894. Juli.

48. Probst, Über den Verlauf der zentralen Sehfasern und deren Endigung im Zwischen- und Mittelhirn usw. Archiv für Psychiatrie. 1902.

49. Derselbe, Die Untersuchungen über die Schleifeendigung usw. Archiv für Psychiatrie. 1900.

50. Sachs, Eine vergleichend-anatomische Studie des Thalamus opticus der Säugetiere. Arbeiten aus dem Neurologischen Institut an der Wiener Universität. Bd. XVII. 1909.

51. Sano, Beitrag zur vergleichenden Anatomie der Substantia nigra, des C. Luysii und der Zona incerta. Monatschrift für Psychiatrie und Neurologie. 1910.

52. Stieda, Studien über das Zentralnervensystem der Wirbeltiere. Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie. Bd. XX. 1870.

53. Schnopfhagen, Beiträge zur Anatomie des Sehhügels usw. Sitzungsbericht der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der k. Akademie der Wissenschaften in Wien. Bd. XXV. 1877.

54. Stilling, Untersuchungen über den Bau der optischen Zentralorgane. 1882.

55. C. Vogt, La myéloarchitecture du thalamus du circopithèque. Journal für Psychologie und Neurologie. 1909.

56. Wernicke, Lehrbuch der Gehirnkrankheiten. Bd. I. 1881.

57. Ziehen, Das Zentralnervensystem der Monotremen und Marsupialier. Jenaische Denkschrift Bd. VI, 2. Teil.

58. Derselbe, Die Commissura media. Vortrag, gehalten in der Berliner Gesellschaft für Psychiatrie und Nervenkrankheiten 15. Juni 1908. Ref. im Neurologischen Zentralblatt. 1908. 13.

## Nachtrag zur Literatur.

Nachdem die vorliegende Arbeit von mir durchgesehen und dem Druck übergeben war, wurde mir Friedemanns Arbeit: »Cytoarchitektonik des Zwischenhirns der Cercopitheken mit besonderer Berücksichtigung des Thalamus opticus« (Journal für Psychologie und Neurologie Bd. 18) bekannt. Diese Arbeit stellt das Ergebnis des Studiums von 3 Frontal- und 2 Horizontalserien dar, die nach dem Nißlschen Verfahren (Modifikation Toluidinblau und Kresylviolett) bearbeitet wurden. Sie erstrebt die Einteilung des Diencephalon in eine möglichst große Zahl von topographischen Regionen, die sich nach dem Reichtum der Zellen, ihrem Gruppierungscharakter, ihrer Größe, Form, Färbbarkeit, Struktur und nach der Grundsubstanz zwischen den Zellen voneinander unterscheiden. Im Gegensatz zu Malone und mir, die, wie Jacobsohn, die Struktur der Zelle für das wichtigste Merkmal zur Differenzierung des Graues halten, hebt Friedemann den Reichtum an Zellen und den Charakter ihrer Gruppierung besonders hervor und betrachtet dies als primäre Erscheinungen. Bei einem parallelen Studium von Faser- und Zellenpräparaten drängt sich aber der Gedanke auf, daß der Reichtum an Zellen und der Gruppierungscharakter derselben öfter als sekundäre Erscheinung zu betrachten sind, die durch die Masse und den Faserverlauf in dem betreffenden Abschnitte des Zentralnervensystems bedingt sind. Friedemann hat im Diencephalon 38 topographische Regionen unterschieden; für mich aber ist es sehr zweifelhaft, ob mit Recht diese rein topographischen Abschnitte Kernen gleichgestellt werden können, wenn wir unter den letzteren eine Gruppe von Zellen von gleichartiger Funktion verstehen sollen. Soweit es wenigstens mir bekannt, ist es in bezug auf den Thalamus nicht erwiesen, daß Zellen

reichere Regionen eine irgendwelche andere physiologische Bedeutung besäßen als Zellen ärmere. Friedemanns Arbeit, sofern sie die rein topographische Zergliederung des Thalamus anstrebt, ist als Rückschritt zu betrachten; versucht er ferner diese Regionen mit Kernen zu identifizieren, dann gerät er in einen Zwiespalt mit sich selbst. So meint Friedemann das Pulvinar als einen selbständigen Kern betrachten zu dürfen, obwohl er selbst zugibt, daß der Zelltypus im Pulvinar sich sehr wenig von demjenigen im lateralen Kern unterscheidet. Es ist Friedemann, wie auch mir, nicht gelungen einen Unterschied in der Zellstruktur des medialen und des vorderen Kerns (pars medialis et dorsalis Nucl. communis) festzustellen; dennoch beschreibt er sie wie selbständige Kerne. Zahlreiche gesonderte Inseln und Reihen des Nucl. reuniens werden im Text als besondere Kerne bezeichnet, und am Schlusse der Arbeit wird darauf hingewiesen, daß nach dem Zelltypus sie sich voneinander fast gar nicht unterscheiden.

Wenn ich auch mit den Ansichten und Schlüssen Friedemanns nicht einverstanden bin, so muß ich doch betonen, daß die Beschreibung einzelner Kerne besonders des Hypo- und Metathalamus sehr exakt und ausführlich ist, und daß die Arbeit besonders wertvoll durch die ihr beigegebenen naturgetreuen Abbildungen ist. Bei der Durchmusterung dieser Abbildungen werden sich wohl viele Leser verwundert fragen, warum der Autor diese oder jene Stelle, die sich von anderen nicht im geringsten unterscheidet, als ein besonderes Feld oder womöglich als einen besonderen Kern bezeichneth at. Auf Einzelheiten der Arbeit kann ich nach Abschluß der Korrektur zu meinem Bedauern nicht eingehen.

## Erklärung der Zeichnungen.

Die Figuren 1—28 auf Taf. I—VII stellen Frontalschnitte des Diencephalon dar. Auf jeder Tafel sind die Schnitte der entsprechenden Gebiete von allen vier Tieren abgebildet. Im oberen Teile stehen die Bilder vom Igel und vom Kaninchen, im unteren die des Hundes und des Affen. Neben jedem Bild habe ich die Anfangsbuchstaben des betreffenden Tieres angegeben (Igel = I, Kaninchen = K, Hund = H, Affe = A). Die Umrisse der Figuren und der einzelnen Kerne sind durch einen Projektionsapparat aufgenommen[1]. Die Vergrößerung der Zeichnungen war bei allen eine achtfache. In diese Umrisse wurden sodann die Zellen eingetragen, und zwar so, daß in eine Figur die Zellen einiger fortlaufender Schnitte aufgenommen wurden. Bei kleinen Tieren, bei denen beide Thalami abgebildet sind, habe ich absichtlich an beiden Seiten nicht ganz gleiche Bilder gesetzt.

In schwarzer Farbe sind die Grundkerne, in roter die akzessorischen abgebildet. Die neuen Teile des Nucl. communis habe ich jedoch in schwarzer Farbe abgebildet, um auf diese Weise die enorme Entwicklung dieses Kernes deutlicher hervortreten zu lassen.

[1] Für die mir dabei geleistete Unterstützung spreche ich Hrn. Kollegen E. Christeller meinen besten Dank aus.

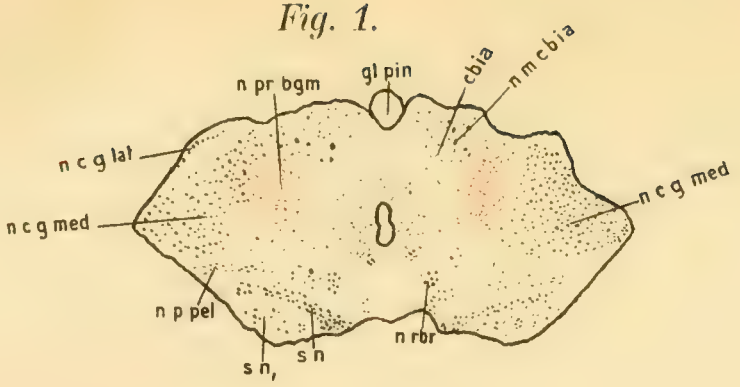
Die Bezeichnungen auf den Figuren 1—28 bedeuten folgendes:

| | |
|---|---|
| cbia | Zellen des vorderen Zweihügels |
| Com ant | Commissura anterior |
| g ob | Ganglion opticum basale |
| gr sbth | Griseum subthalamicum |
| g v c g lat | Griseum ventrale corporis geniculati lateralis |
| f | Fornixsäule |
| n ant th | Nucleus anterior thalami |
| n bcrl th | Nucleus bicruralis thalami |
| n c | Nucleus caudatus |
| n c g lat | Nucleus corporis geniculati lateralis |
| n c g med | Nucleus corporis geniculati medialis |
| n cnfm th | Nucleus cuneiformis thalami |
| n cs th (med) | Nucleus communis thalami (pars medialis) |
| n cs th (drlt) | Nucleus communis thalami (pars dorso-lateralis) |
| n cs (dors) | Nucleus communis thalami (pars dorsalis) |
| n cs (ventr) | Nucleus communis thalami (pars ventralis) |
| n d cgm | Nucleus dorsalis corporis geniculati medialis |
| n hpth | Nucleus hypothalamicus |
| n i c mam | Nucleus intercalatus corporis mamillaris |
| n i pe | Nucleus interpeduncularis |
| n l c mam | Nucleus lateralis corporis mamillaris |
| n l gh | Nucleus lateralis des Ganglion habenulae |
| n m c b i a | Nucleus motoris corporis bigemini anterioris Jacobsohn |
| n m c mam | Nucleus medialis corporis mamillaris |
| n mdn | Nucleus medianus thalami |
| n mes trg | Nucleus radicis mesencephalici N. trigemini |
| n mgh | Nucleus medialis des Ganglion habenulae |
| n mg th | Nucleus magnocellularis thalami |
| n mn cgl | Nucleus magnocellularis corporis geniculati lateralis |
| n oc | Nucleus oculomotorius |
| n p pel | Nucleus peripeduncularis lateralis Jacobsohn |
| n pr bgm | Nucleus praebigeminalis thalami |
| n pr cgl | Nucleus principalis corporis geniculati lateralis |
| n pr mdn | Nucleus paramedianus thalami |

| | |
|---|---|
| n rbr | Nucleus ruber (Nucleus rotundus subthalamo-peduncularis Jacobsohn) |
| n rn th | Nucleus reuniens thalami |
| n spmam | Nucleus supramamillaris |
| n sprgn | Nucleus suprageniculatus |
| n sy oc | Nucleus sympathicus oculomotorius Jacobsohn |
| n v cgm | Nucleus ventralis corporis geniculati medialis |
| s g v | Substantia grisea des III. Ventrikels |
| s n | Substantia nigra (Nucleus pigmentosus subthalamo-peduncularis Jacobsohn) |
| s n, | Kleine Zellen ventral von der Substantia nigra |
| t | Zellen des Telencephalon |
| ZG | Größere Zellen der äußeren Gitterschicht. |

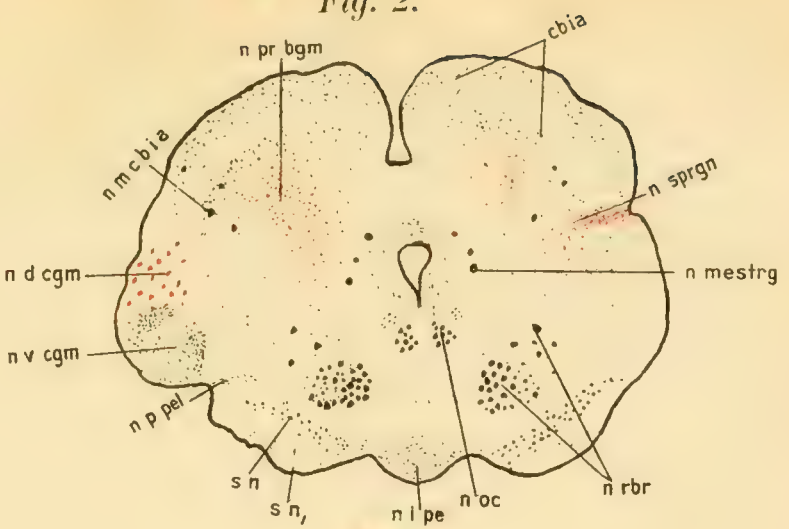
J.

*Fig. 1.*



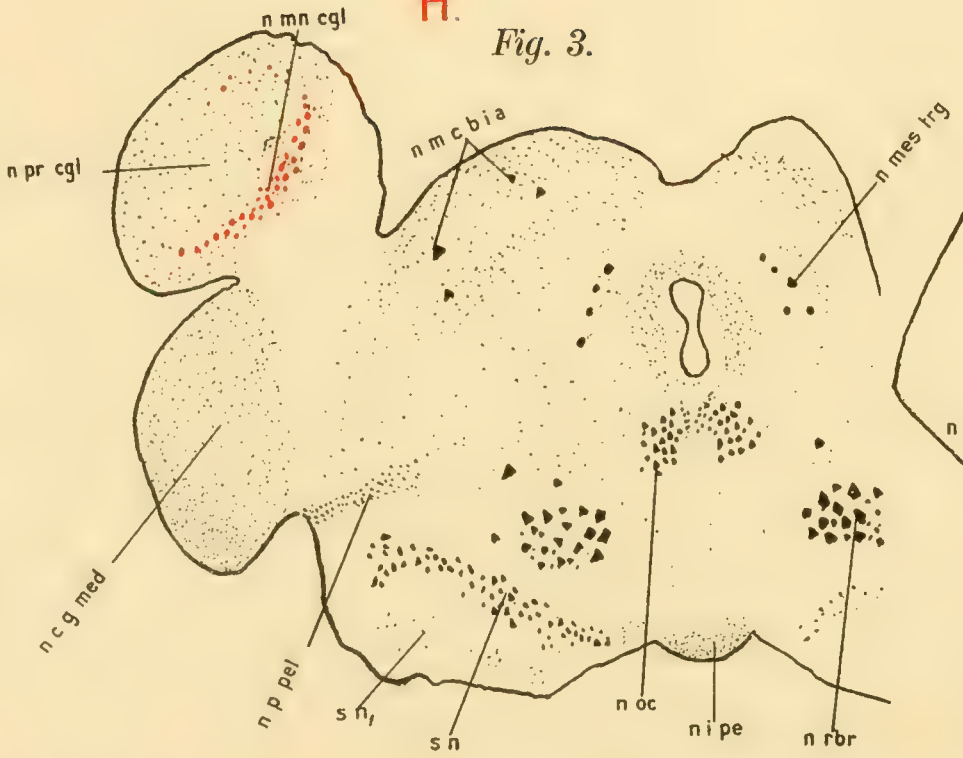

K.

*Fig. 2.*



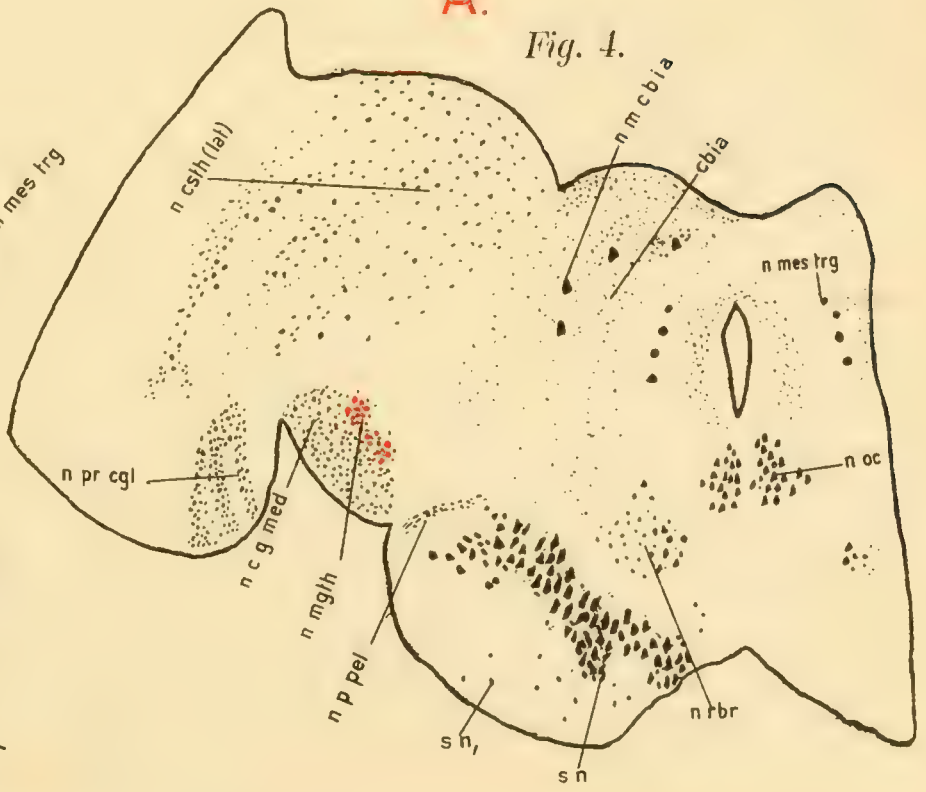

H.

*Fig. 3.*




A.

*Fig. 4.*

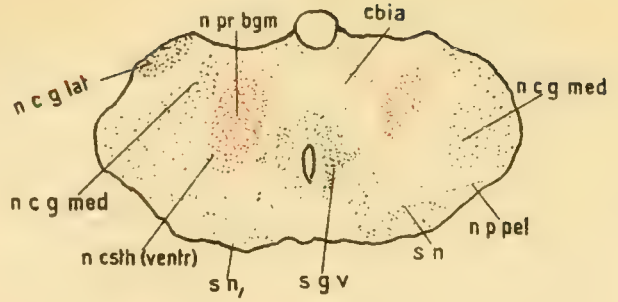



M. Neiding: Über die Kerne des Diencephalon bei einigen Säugetieren.

Taf. I.

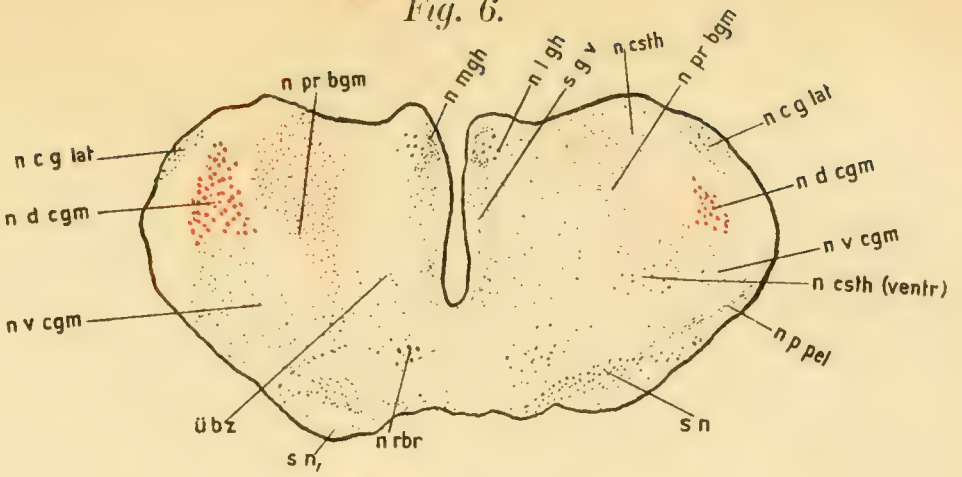
J.

*Fig. 5.*



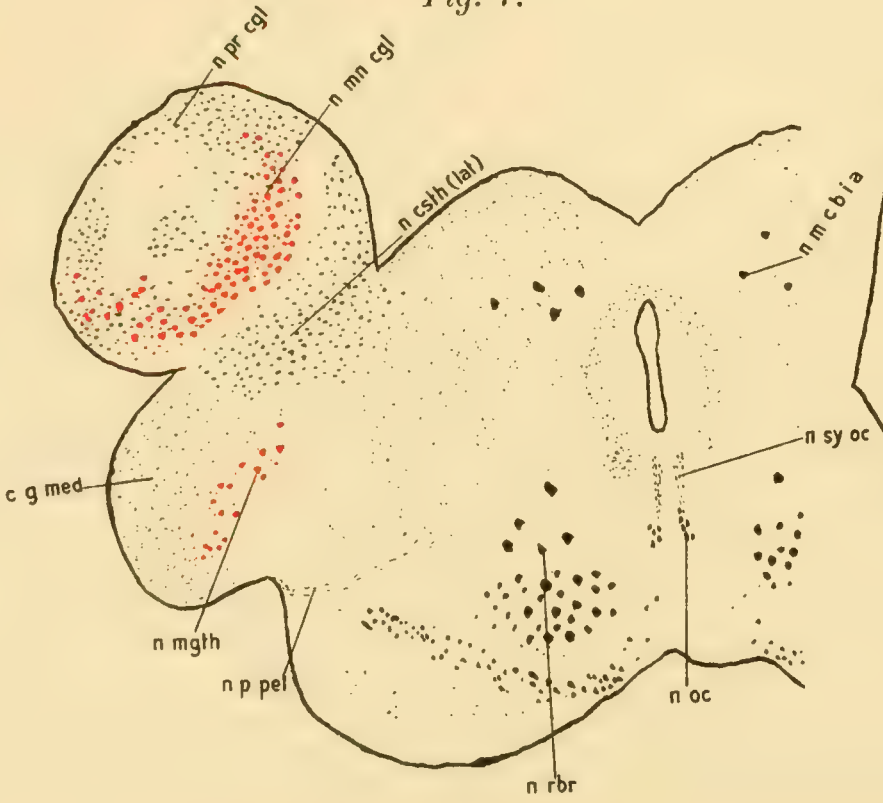

K.

*Fig. 6.*



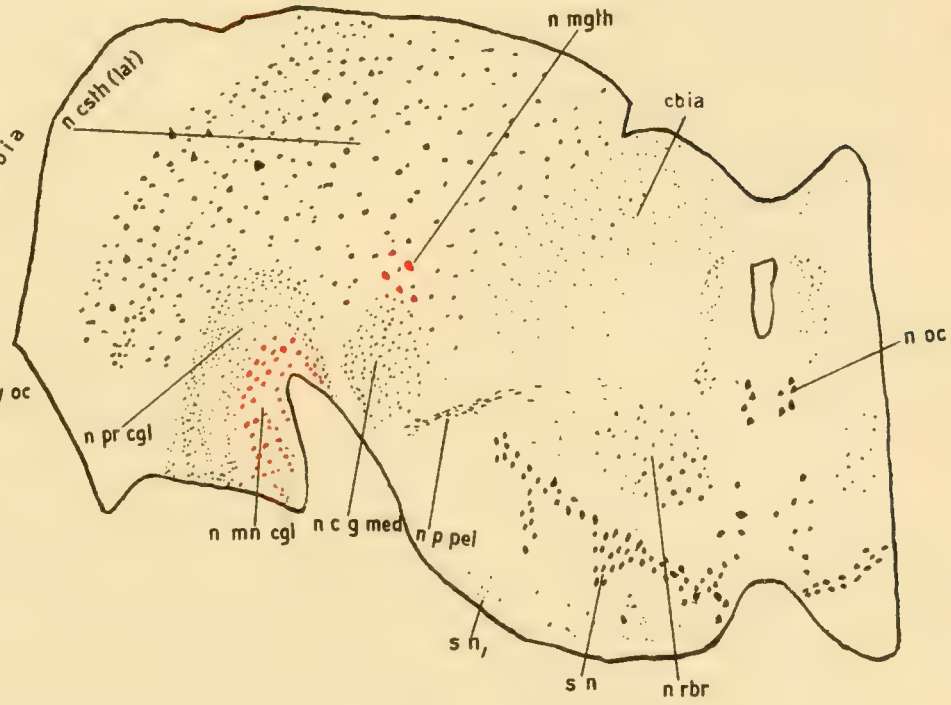

H.

*Fig. 7.*




A.

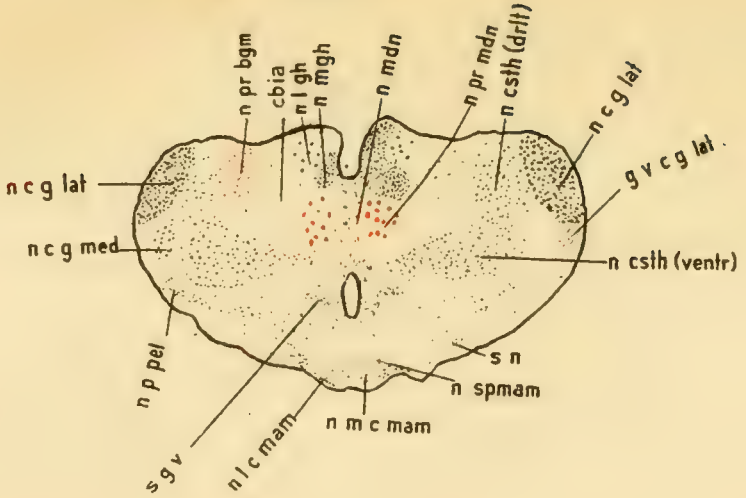
*Fig. 8.*



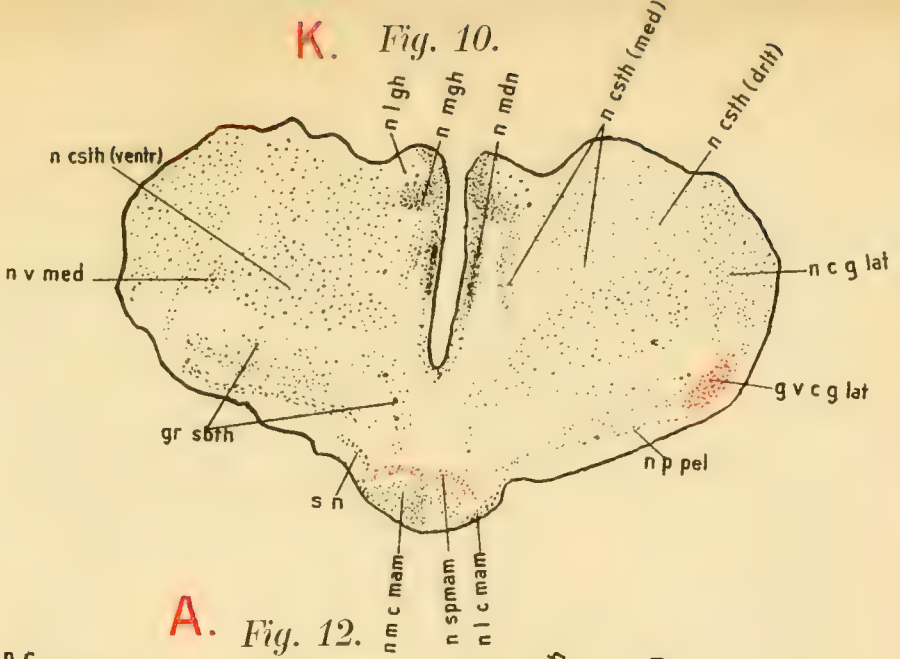

M. Neiding: Über die Kerne des Diencephalon bei einigen Säugetieren.

Taf. II.

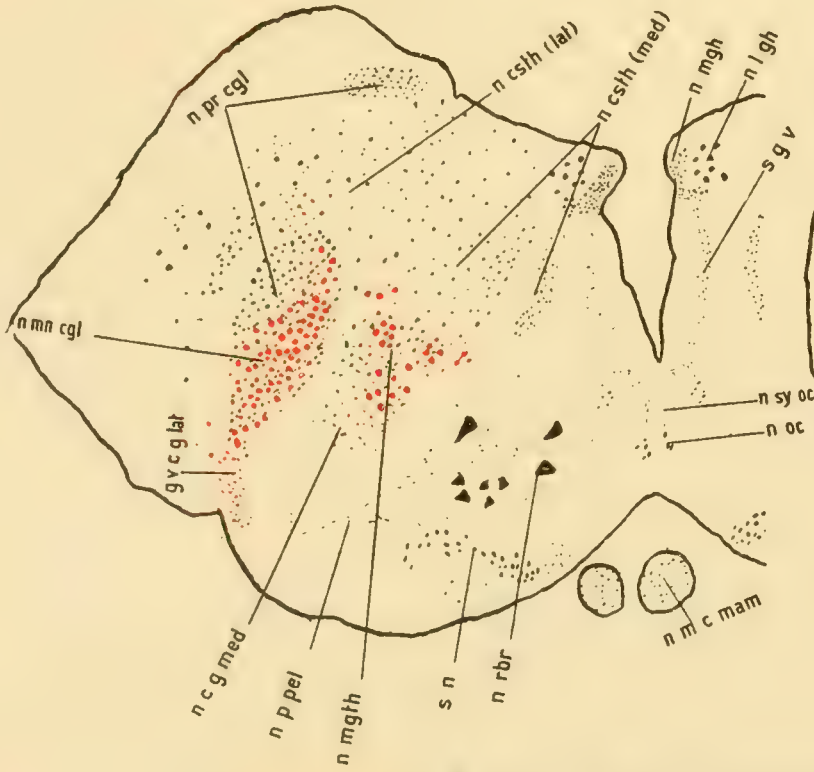
J. *Fig. 9.*




K. *Fig. 10.*




H. *Fig. 11.*

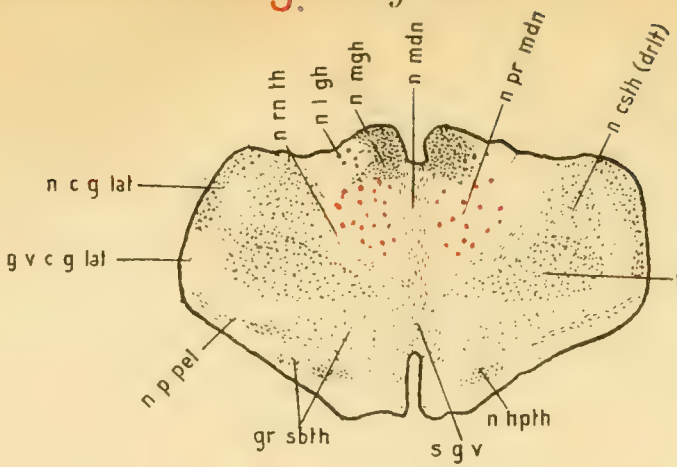



A. *Fig. 12.*

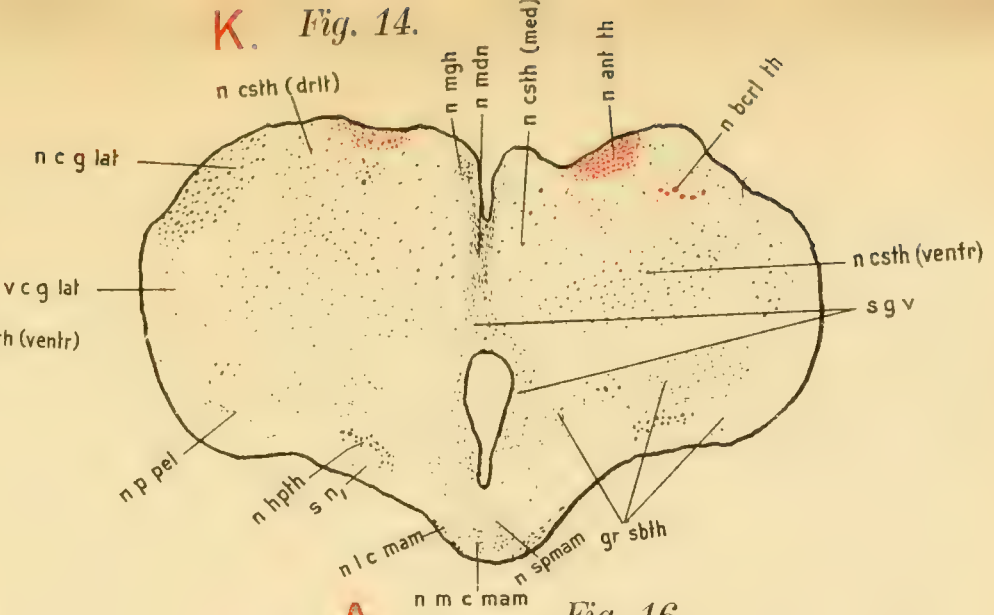
M. Neiding: Über die Kerne des Diencephalon bei einigen Säugetieren.

Taf. III.

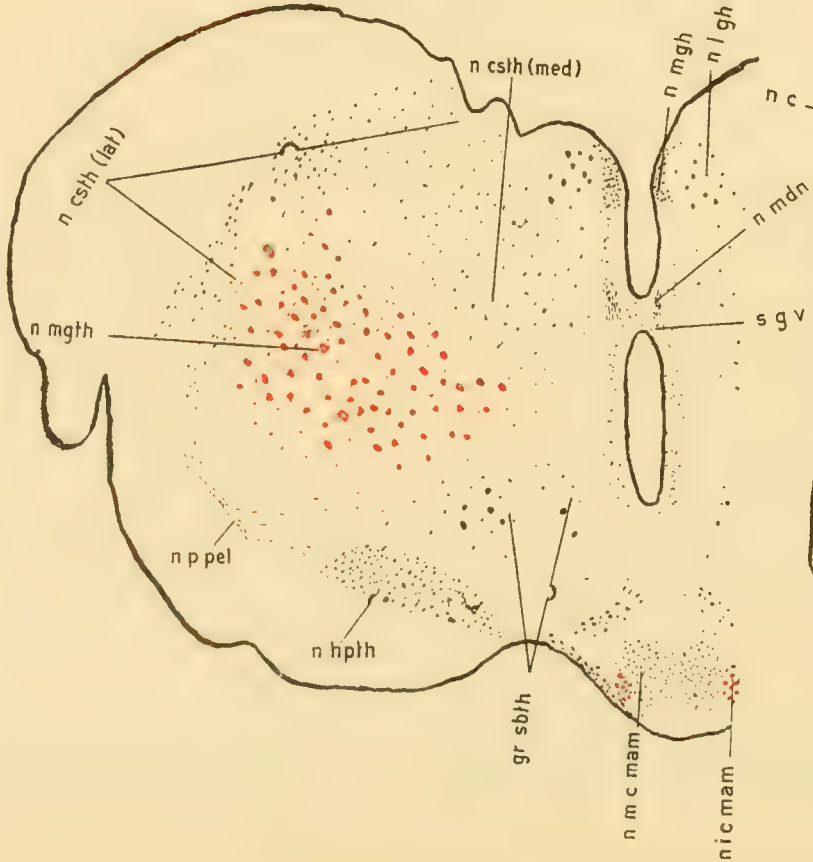
J. *Fig. 13.*




K. *Fig. 14.*




H. *Fig. 15.*

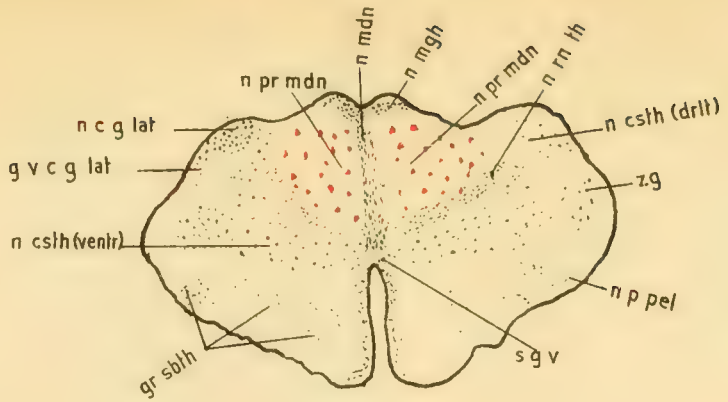



A. *Fig. 16.*

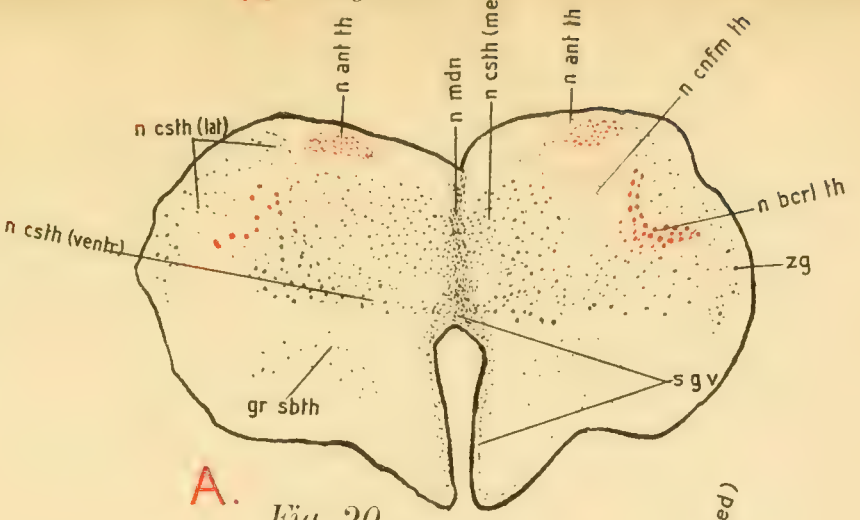
M. Neiding: Über die Kerne des Diencephalon bei einigen Säugetieren.

Taf. IV.

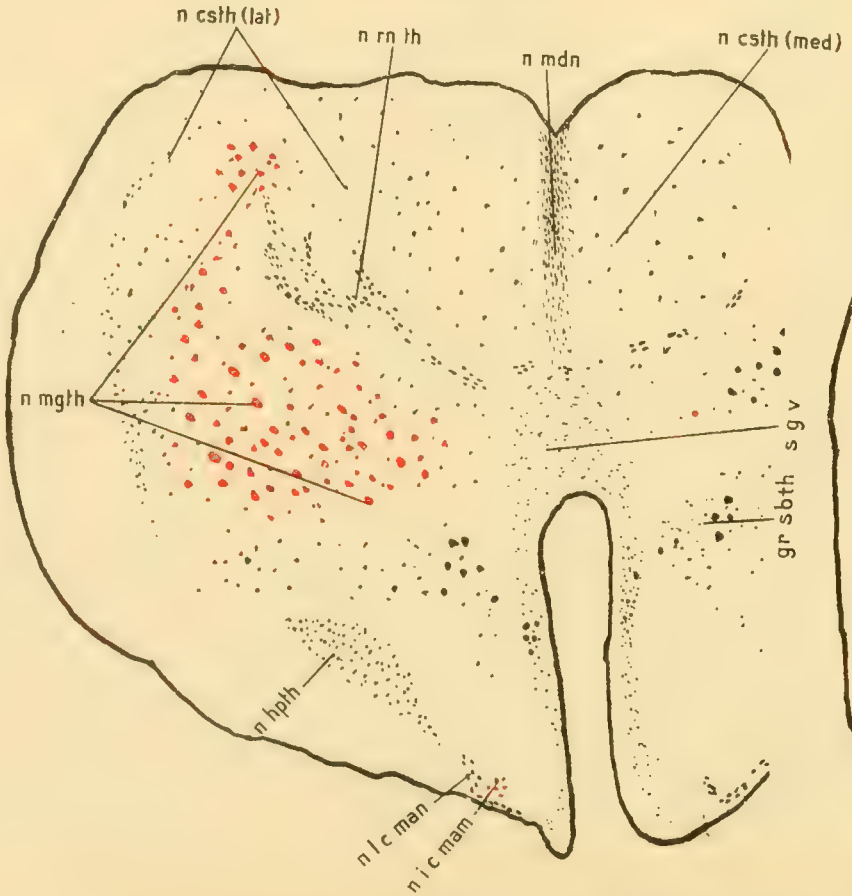
J. *Fig. 17.*



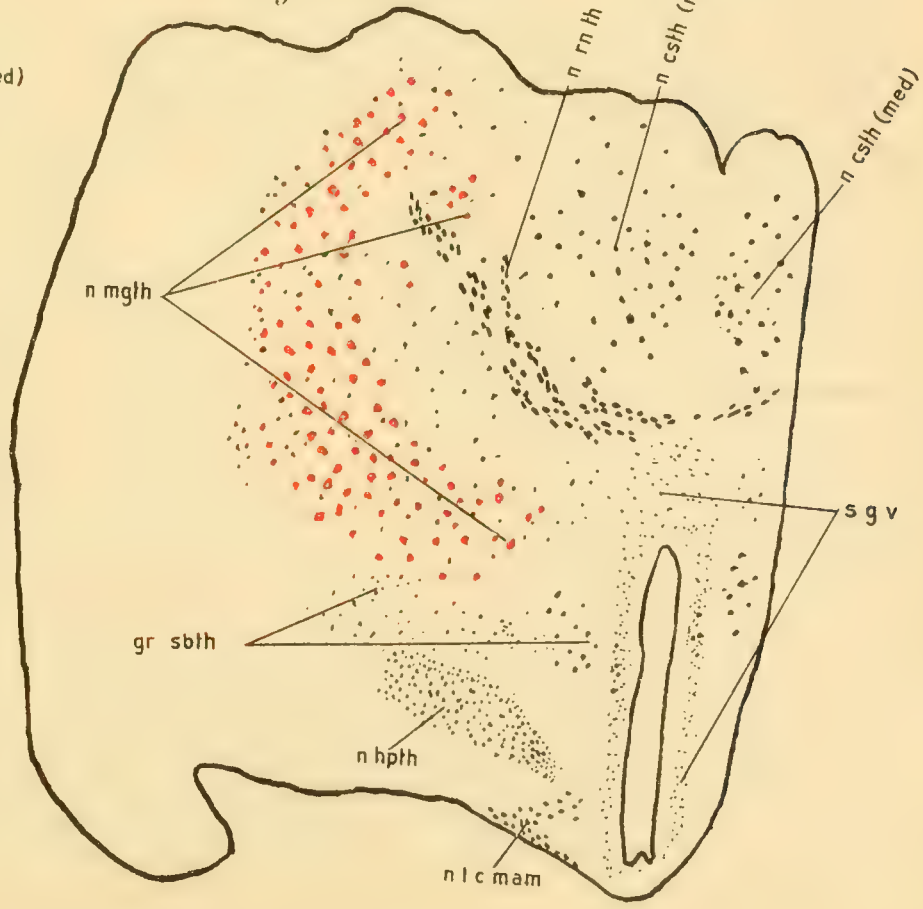

K. *Fig. 18.*




H. *Fig. 19.*



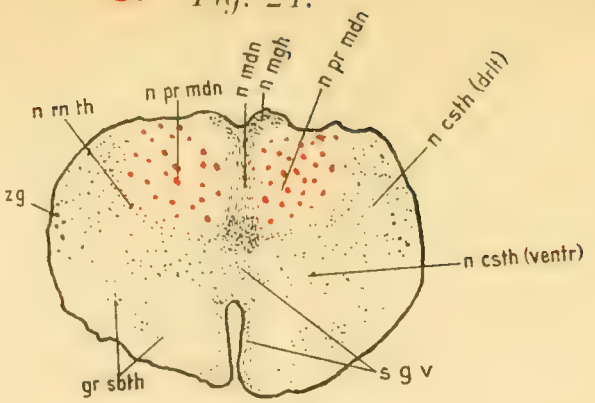

A. *Fig. 20.*



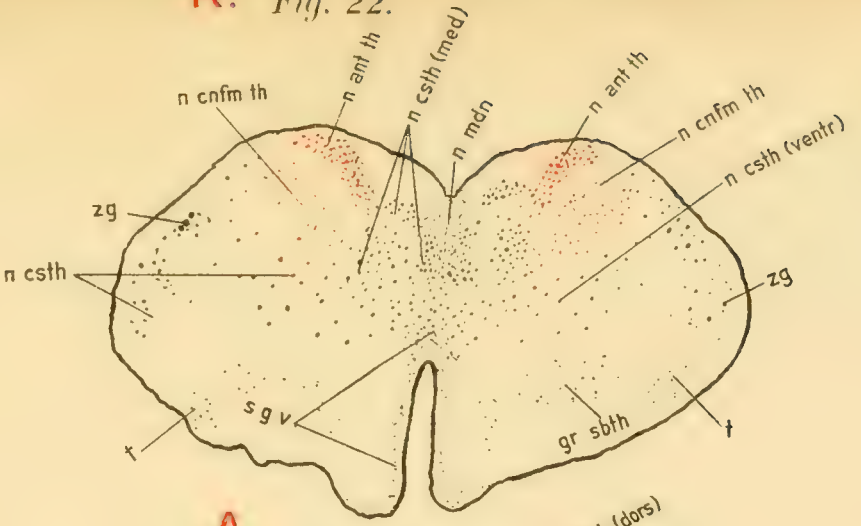

M. Neiding: Über die Kerne des Diencephalon bei einigen Säugetieren.

Taf. V.

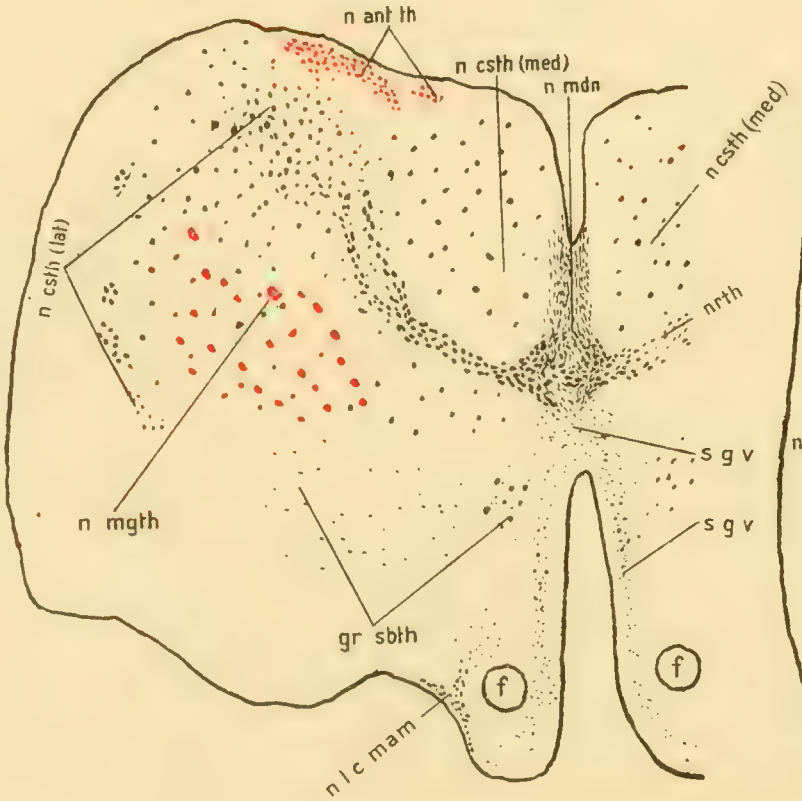
J. *Fig. 21.*



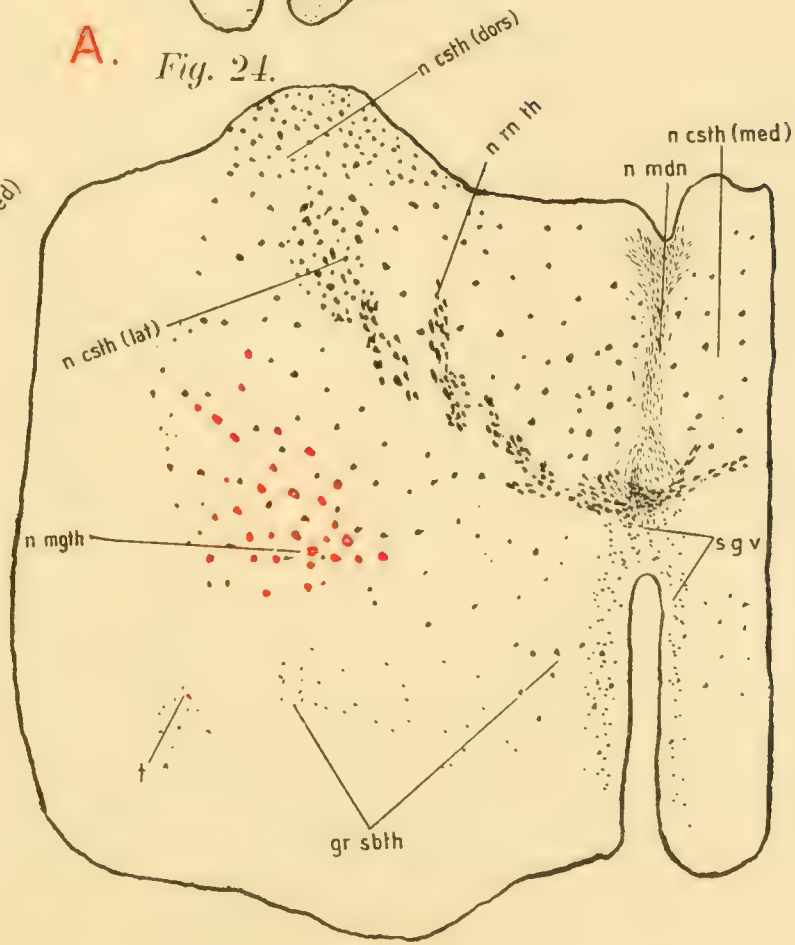

K. *Fig. 22.*




H. *Fig. 23.*



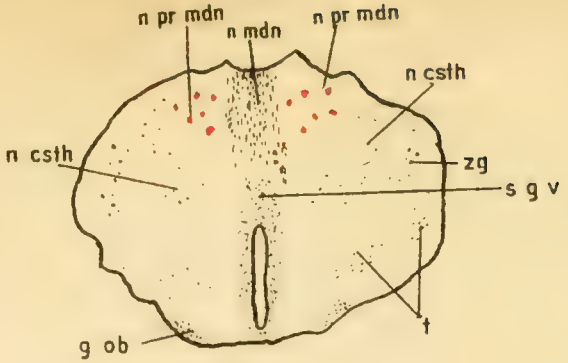

A. *Fig. 24.*



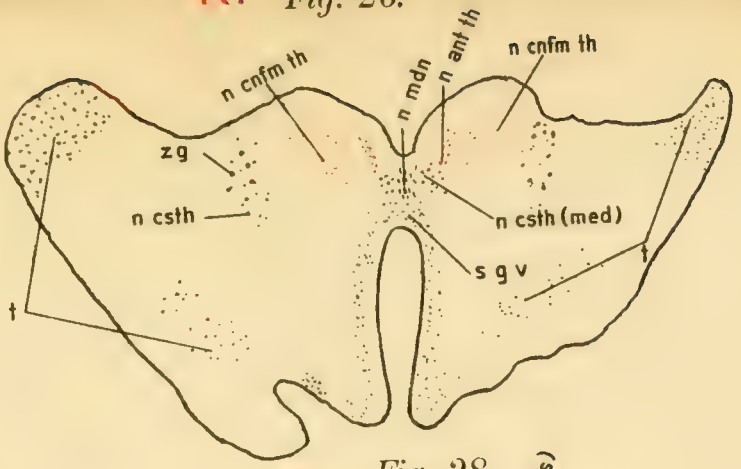

M. Neiding: Über die Kerne des Diencephalon bei einigen Säugetieren.

Taf. VI.

J. *Fig. 25.*




K. *Fig. 26.*




H. *Fig. 27.*

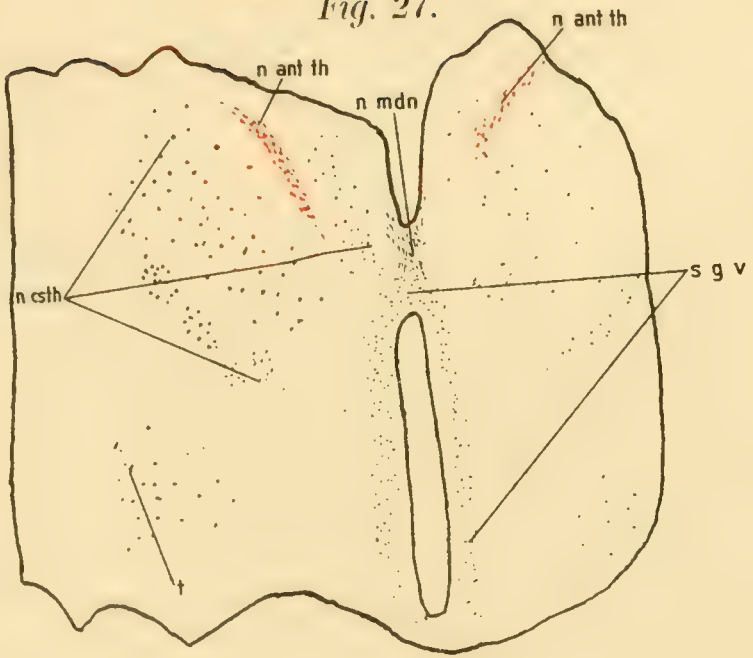
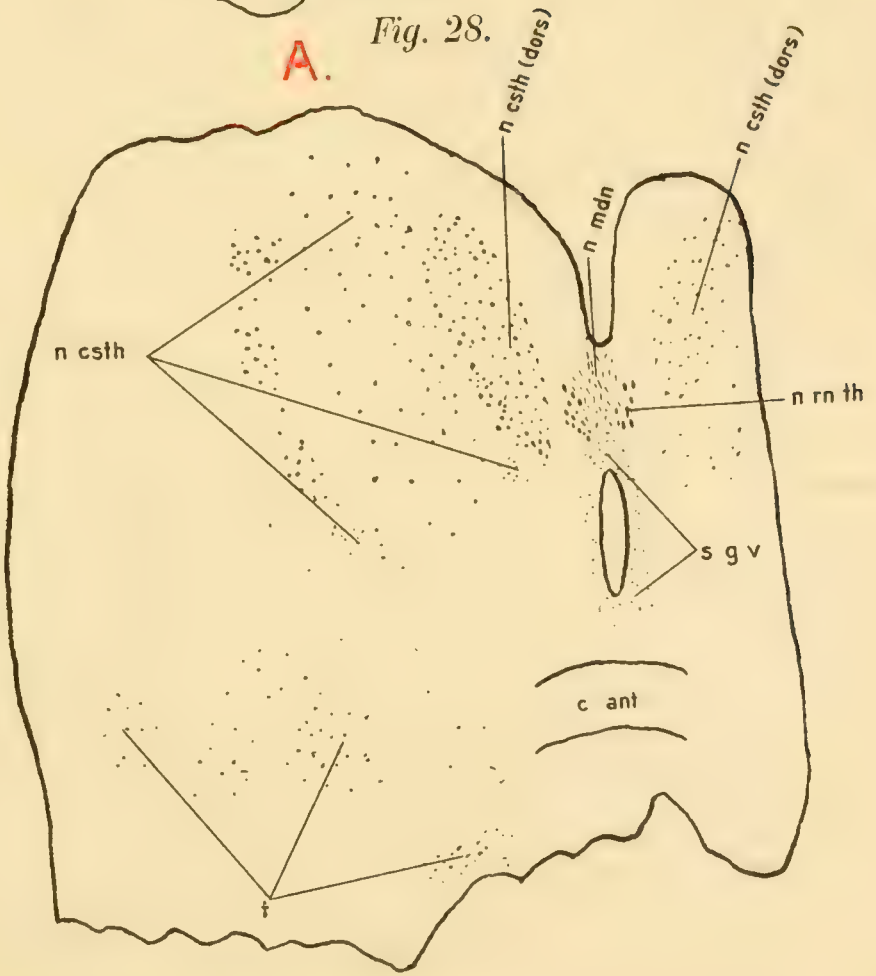



*Fig. 28.*

A.




M. Neiding: Über die Kerne des Diencephalon bei einigen Säugetieren.

Taf. VII.

K. Preuß. Akad. d. Wissensch.

Anhang z. d. Phys.-math. Abh. 1911.

# Zur Kenntnis der Großhirnrinde der Maus.

Von

Dr. ROBERT ISENSCHMID,

vormals Assistenten am Neurologischen Institut in Frankfurt a. M.

Vorgelegt von Hrn. Waldeyer in der Sitzung der phys.-math. Klasse am 16. März 1911.
Zum Druck verordnet am 23. März 1911, ausgegeben am 17. Juni 1911.

Die Kgl. Akademie der Wissenschaften in Berlin hat dem Neurologischen Institut in Frankfurt a. M. im Mai 1909 eine größere Summe bewilligt, um dessen Studien über den Zusammenhang der einzelnen Teile der Hirnrinde zu unterstützen. Schon im Beginn dieser Arbeiten stellte sich als Mangel heraus, daß wir von keinem der gewöhnlichen Laboratoriumstiere den normalen Bau der Rinde zur Genüge kennen. Auf Veranlassung des Hrn. Professor Edinger habe ich deshalb festzustellen gesucht, was wir bei Anwendung der uns zur Verfügung stehenden technischen Hilfsmittel über die Hirnrinde der Maus heute ermitteln können.

Mit der Golgischen Methode, welche nur einzelne Elemente, diese aber mit allen ihren Ausläufern darstellt, ist schon vieles von Cajal und Stefanowska über die Rinde der Maus ermittelt worden. Der Wert jener Untersuchungen ist außerordentlich hoch, wird aber dadurch etwas beeinträchtigt, daß sie ohne genügende Rücksichtnahme auf die regionären Unterschiede im Rindenbau unternommen worden sind.

Auch die Fibrillenfärbungsmethoden nach Cajal und nach Bielschowsky können in ihrem vollen Wert erst dann zur Geltung kommen, wenn die regionären Unterschiede im Bau der Rinde ermittelt sind. Die Fibrillenmethoden selbst eignen sich zu der Feststellung dieser Unterschiede zunächst nur wenig, weil sie nicht ganz konstante Ergebnisse liefern.

Für die Markscheidenfärbung nach Weigert lagen mir, teils aus den Beständen des Instituts, teils nach Neuherstellung, mehrere Serien vor. Es dringen aber markhaltige Fasern nur so spurweise in die äußeren Schichten der Rinde ein, und es finden sich markhaltige Plexus nur eben angedeutet, so daß diese Methodik, die z. B. in der menschlichen Rinde so gute Resultate gab, sich bei der Maus von keinem Nutzen erwiesen hat. Ich habe auch versucht, mit der Marchimethode Degenerationsbilder zu bekommen, aber da

diese nur markhaltige Fasern angibt, kam wenig bei den an der Rinde operierten Tieren heraus. Selbst längere degenerierte Faserzüge in den Hemisphären habe ich nach oberflächlicher Rindenzerstörung vermißt. Sehr viel Zeit, Mühe und Arbeit habe ich darauf verwendet, diejenigen Zellen der Hirnrinde am Degenerationsbild festzustellen, welche nach Durchschneidung oder Anätzung anderer Rindenstellen entarten. Ebenso sind an Mäusen, Ratten und Kaninchen auch Versuche mit Balkendurchschneidung unternommen worden, die feststellen sollten, welche Zellen nach dieser Operation das bekannte Bild der Tigrolyse aufwiesen.

Für diese wie für alle anderen Untersuchungen war aber doch Voraussetzung, daß man alle einzelnen Stellen der Rinde selbst nach Bau, Lage und Anordnung einmal erst genau bestimmte, und ich habe die meiste Zeit auf die Lösung gerade dieser Aufgabe verwendet.

Unstreitig haben bisher die Färbungen nach Nissl, welche alle Zellen, wenn auch nur in ihrem Rumpfe, zur Darstellung bringen, in der Aufdeckung der örtlichen Unterschiede im Bau am meisten geleistet, wie unter anderem die verdienstvollen Untersuchungen von Brodmann (2—8) dartun. Ich werde deshalb in erster Linie die Ergebnisse der Färbungen mit basischen Anilinfarben, die sogenannte »Cytoarchitektonik«, beschreiben und die Resultate, welche andere Untersuchungsmethoden liefern, nur gelegentlich herbeiziehen, soweit sie mir geeignet scheinen, das Zellbild verständlicher zu machen oder zu ergänzen.

Ich weiß, daß meine Kompetenz zu einer solchen Untersuchung bestritten werden kann. Brodmann hat wiederholt betont, daß nur der über die Gliederung der Hirnrinde mitsprechen darf, der über große Erfahrung, die alle Ordnungen der Säugetiere betrifft, verfügt, eine Erfahrung also, die nur durch mehrere Jahre lang dauernde, fast ausschließliche Beschäftigung mit diesem Thema erworben werden kann. Eine solche Erfahrung besitze ich nicht, und ich habe das während meiner Arbeit als Mangel empfunden, obschon ich meine Untersuchungen nicht allein auf die Maus beschränkt, sondern auch andere Nager, speziell Ratte und Kaninchen, und außerdem die Rinde des Menschen zum Vergleich herangezogen habe.

Leider fehlt uns zur Zeit eine ganz ausführliche Beschreibung der Rinde eines Nagetieres. Wohl hat B. Haller (18) eine Darstellung der Hirnrinde der Maus gegeben. Er geht aber in der Unterscheidung der Felder viel weniger weit, als man es ungezwungen kann und als es als Grundlage für physiologische Versuche wünschenswert ist. Noch weniger eingehend ist die Untersuchung von Hermanides und Köppen (20). Brodmann hat uns von den Nagern bisher außer Oberflächendiagrammen, die eine Identifikation der Strukturen nicht ohne weiteres erlauben, nur eine Beschreibung einzelner Felder gegeben. Ich sehe mich also vor Inangriffnahme experimenteller Untersuchungen über die Rinde der Maus

wohl oder übel gezwungen, die regionären Unterschiede selbst und neu festzustellen, soweit sie auch der nicht auf Cytoarchitektonik spezialisierte Histologe an guten Präparaten wahrzunehmen vermag.

Ich werde meine Beobachtungen mit zahlreichen Photogrammen belegen und hoffe, nicht allzu viele Irrtümer zu begehen, wenn ich den Fehler mancher anderer Autoren, welche sich mit Cytoarchitektonik befaßt haben, zu vermeiden suche und über die physiologische Bedeutung der Felder nicht mehr als Vermutungen ausspreche, denn ganz kompetent ist hier nur das physiologische Experiment, dem wir vorarbeiten. Sollte ich trotzdem Irrtümer begehen, würde ich sie nicht bereuen, wenn sie einen Erfahreneren dazu veranlassen sollten, eine ausführliche Beschreibung der Rindenfelder — wie sie uns Brodmann bisher nur bis zu den Halbaffen herunter gegeben hat — von einem niedrigen Säugetier[1], besonders von einem uns allen zugänglichen Laboratoriumstiere, zu geben. Bis dahin müssen wir uns selber helfen.

Es steht uns von erwachsenen Tieren folgendes Material zur Verfügung: 12[2] vollständige Serien in frontaler Richtung durch das Großhirn der weißen Maus, eine dreizehnte Frontalserie durch das Gehirn der grauen Hausmaus, je zwei vollständige Serien in sagittaler und horizontaler Richtung durch das Großhirn der normalen weißen Maus. Diese 17 Gehirne waren fixiert und gehärtet in Alkohol, eingebettet in Paraffin, auf 10 $\mu$ Dicke geschnitten und mit Kresylviolett gefärbt. Dieser Farbstoff gab uns von den ausprobierten basischen Anilinfarben die konstantesten Resultate und die haltbarsten Präparate. Ich benutzte außerdem 3 nach Bielschowskys Fibrillenmethode mit gutem Erfolg imprägnierte vollständige Serien durch das Großhirn der erwachsenen Maus, je eine in sagittaler, horizontaler und frontaler Richtung, eine weitere gute Frontalserie nach Cajal (Fibrillen). Ferner je eine Serie (30 $\mu$) in den drei Hauptrichtungen nach Weigerts Markscheidenmethode gefärbt und zahlreiche, genau lokalisierte, nach Golgi imprägnierte Einzelschnitte. Als weitere Vergleichsobjekte dienten uns verschiedene vollständige Serien durch das Großhirn der Ratte und des Kaninchens, teils mit Kresylviolett oder Toluidinblau, teils nach Weigerts Markscheidenmethode gefärbt. Weiteres Material lieferten uns in Entwicklung begriffene Mäusegehirne. Wir führen die Einzelheiten weiter unten an.

G. A. Watson (42) macht geltend, daß vollständige Serien durch das Gehirn eines kleinen Tieres so viele Schrägschnitte enthalten, daß man daran die Dicke der Rinde nicht genau bestimmen kann. Er hat deshalb selbst die kleinsten Gehirne (z. B. Spitzmaus) in

---

[1] Seit der Niederschrift dieser Zeilen ist eine die »Myeloarchitektonik« des Igels darstellende Arbeit von Flores erschienen (Journal f. Neurologie u. Psychologie Bd. 17). Die Markscheidenmethode erlaubte bei diesem Tiere die Unterscheidung zahlreicher, gut charakterisierter Felder.

[2] Bei 10 von diesen Gehirnen war zum Zwecke des Studiums von Degenerationserscheinungen die Rinde nach einem älteren Vorschlage von Edinger 10 Tage vor der Tötung an umschriebener Stelle mit Formalin geätzt worden. Da diese Operation, abgesehen von der Ätzstelle, die Schichtung nicht beeinflußt hat, durften wir diese Präparate neben den von nicht operierten Mäusen stammenden zur Feststellung der normalen Verhältnisse benutzen. — Formalin bringt das Gewebe sofort zur Koagulation, »fixiert« es augenblicklich. Die so veränderte Gewebspartie wird unter äußerst geringen Reaktionserscheinungen in wenigen Tagen restlos resorbiert. Das Verfahren eignet sich sehr gut für viele Exstirpationsversuche.

Blöcke zerlegt, die eine genau senkrechte Schnittrichtung erlaubten. Durch eine solche Zerstückelung wird die Orientierung aber so sehr erschwert, daß wir es vorgezogen haben, nur an vollständigen Serien, dafür aber mehreren, in verschiedener Schnittrichtung geführten, zu arbeiten. Bei jeder Schnittrichtung wird ein anderer Teil der Rinde genau senkrecht getroffen. Die Maße, die wir von der Breite der Rinde geben, betreffen immer solche senkrecht getroffenen Stellen.

## 1. Makroskopische Anatomie.

Wie alle Säugergehirne, läßt sich auch das Gehirn der Maus in ein Paläencephalon und Neencephalon, (Edinger, 12), einteilen. Die Rinde des ersteren nenne ich mit Kappers (22) Paläocortex. Sie entspricht dem, was man gewöhnlich als Rinde des Riechlappens bezeichnet. In der Rinde des Neencephalon, dem Neocortex, unterscheidet Edinger bekanntlich noch die Rinde des Archipallium (Ammonshorn) von der des Neopallium. Ich werde mich in meiner Beschreibung auf die Darstellung der Rinde des Neopallium allein beschränken. Sie ist bei niederen Säugern viel weniger genau bekannt als die einfacher gebauten, phylogenetisch älteren Teile der Rinde und entspricht dem, was wir bei höheren Säugern und speziell beim Menschen allein als typische Hirnrinde aufzufassen gewohnt sind. Riechlappen und Ammonshorn werden wir nur insoweit berücksichtigen, als es die nachbarlichen Beziehungen zu der Rinde des Neopalliums mit sich bringen werden.

Die Konvexität der Hemisphären der Maus erscheint in frischem Zustande im wesentlichen glatt und furchenlos. Ein fixiertes und gehärtetes Mäusegehirn dagegen zeigt in der Regel mehrere ganz seichte Furchen. Die meisten von ihnen treten nur nach der Entwässerung deutlich hervor und sind durch Gefäße bedingte Eindrücke, welche wir wegen ihrer Inkonstanz nicht beschreiben. Zwei Gruben jedoch sind schon in frischem Zustande regelmäßig vorhanden:

1. Die Fovea limbica. Sie verläuft in einem flachen, nach aufwärts konkaven Bogen auf der Höhe der lateralen Konvexität des Pallium. Sie beginnt nahe dem okzipitalen Ende, verläuft leicht absteigend nach vorn, um ungefähr in der Mitte der Länge der Hemisphäre flach auszulaufen. Sie scheidet den Neocortex von dem Paläocortex.

2. Eine Fovea olfactoria, die den Frontalpol von unten her seicht einkerbt. Diese Furche ist bedingt durch den anliegenden Tractus und Bulbus olfactorius. Sie trennt Feld *r* von Feld *n*.

Außer diesen beiden konstanten und manifesten Gruben sind drei sogenannte innere Furchen, welche im fixierten und gehärteten Gehirn nicht selten stellenweise auch äußerlich manifest werden, deshalb erwähnenswert, weil sie konstant sind und in ihrer Lage genau äußeren Furchen anderer Nager entsprechen, welche stärker gefurchte Gehirne besitzen. Diese inneren Furchen sind Einkerbungen, welche nur die Zellschichten der Rinde betreffen, während die Molekularschicht, um so viel verbreitert, als die Zellschicht verschmälert ist, darüber wegzieht und so die Furche für den äußeren Anblick ausgleicht. Die eine dieser inneren Furchen setzt die Fovea olfactorica nach vorn fort. Eine zweite verläuft an der medianen Hemisphärenfläche über dem Balken zwischen der Fasciola cinerea und unseren Feldern *q* und *m* nach vorn, bildet weiter etwas absteigend die Grenze zwischen den Feldern *m* und *p* und läuft schließlich in die Spalte aus, welche den Frontalpol vom Tractus olfactorius trennt, die Fissura rhinalis medialis. Eine dritte verläuft auf der dorsalen Fläche sagittal, parallel der Mantelkante, etwa 1 mm lateral von derselben in fast der ganzen Länge der Hemisphäre. Sie bildet die laterale Grenze der Felder *l* und *q*. Beim Kaninchen und bei der Ratte ist diese Furche in einigen Teilen ihres Verlaufs regelmäßig als äußere Furche zu sehen. Bei Dolichotis patagonica ist sie nach Flatau und Jacobsohn (14) in der ganzen Länge der Hemisphäre deutlich ausgeprägt. Solche »inneren Furchen« sind also, wie auch B. Haller (18) betont hat, ohne Zweifel als Vorläufer wirklicher Furchen anzusehen. Von der Existenz zweier weiterer Furchen, welche Hermanides und Köppen (20) auch bei der Hausmaus gesehen haben, konnte ich mich nicht überzeugen. Dagegen fand ich in einigen Fällen die von Haller (17) beschriebene »Fissura limbica«, eine seichte Furche, welche dicht unterhalb der Mantelkante in der hinteren Hälfte der Hemisphäre die mediane Wand in sagittaler Richtung einkerbt. Vgl. auch Fig. 18, Taf. IV.

## 2. Einteilung der Rinde. Entwicklungsgeschichte.

Die Unterscheidung und Zählung der Schichten in der Hirnrinde läßt der Willkür Spielraum. Sie ist deshalb durch verschiedene Autoren in so verschiedener Weise erfolgt, daß wir uns zunächst über diese Fragen der Nomenklatur einigen müssen. Die Frage nach der Zahl der Schichten

scheint mir zur Zeit, solange wir über die Bedeutung, besonders den funktionellen Zusammenhang der Strata noch so gut wie gar nichts wissen, nicht von tieferer Bedeutung zu sein. Es handelt sich vor allem um das praktische Erfordernis, sich zwecks Verständigung auf eine bestimmte Art der Zählung zu einigen, die möglichst für die ganze Klasse der Säugetiere durchführbar ist. Sollen wir mit den englischen Autoren (Mott (26), Watson (42), Bolton (1), Tredgold (38) u. a.) fünf Schichten unterscheiden oder mit Brodmann (2—8), O. Vogt (41), Mauß (25) Marinesco und Goldstein (24) u. a. deren sechs? Sechs Schichten sind im Neocortex der Maus nirgends sehr deutlich und ganz ohne Willkür zu unterscheiden. Nun ist Brodmann der Ansicht, daß da, wo die Sechsschichtung fehlt, es sich nur um sekundäre Umgestaltung einer sechsschichtigen Ausgangsform handelt, und wir müssen, wenn er recht hat, erwarten, daß auch die Rinde der Maus, mindestens in ihrer Entwicklung, ein mehr oder weniger deutlich sechsschichtiges Durchgangsstadium durchläuft.

Es sei mir deshalb gestattet, hier kurz auf die Entwicklungsgeschichte dieses Organs einzugehen.

Ich stütze mich dabei auf 2 Serien durch fötale Mäusegehirne aus der 2. Hälfte der Schwangerschaft; die eine stammt von einem Fötus von 10.5 mm, die andere von einer beinahe ausgetragenen Frucht von 20 mm Länge. Für das Studium der Schichtenbildung wichtiger ist aber das etwas ältere Material, denn die Schichten differenzieren sich im Cortex dieses in sehr unreifem Zustande geborenen Tieres im wesentlichen erst zur Zeit der Geburt und in den ersten Lebenswochen. Ich habe deshalb Serien durch das Großhirn der neugeborenen Maus, ferner von neun jungen Mäusen untersucht. Ihr Alter betrug 25—30 Stunden, 3 Tage und wenige Stunden, 6 Tage, 7 Tage und wenige Stunden, 9 Tage und wenige Stunden, etwa 11 Tage, 12 Tage, 17 Tage und etwa 4 Wochen. Alle diese Serien waren in frontaler Richtung geschnitten in einer Dicke von 5, 7 oder 10 $\mu$ und mit Kresylviolett gefärbt.

Über die frühen fötalen Stadien, in denen sich die Rinde von der übrigen Hemisphärenwand noch nicht abgegrenzt hat und eine Schichtung innerhalb des Cortex noch nicht besteht, werden wir kurz hinweggehen. Wir können das um so eher, als wir darüber die schönen Untersuchungen von His (21), Ziehen (44), Paton (27) u. a.[1] besitzen.

[1] Frühe Entwicklungsstufen der Hemisphärenwand betrifft auch eine vor kurzem erschienene Arbeit von B. Haller (19, der älteste untersuchte Mäusefötus war 10 mm lang). Die Arbeit gibt uns deshalb wohl Aufschluß über die Genese der Schichten im Gesamtpallium, nicht aber in der Rinde, die sich erst viel später differenziert. Die wichtigen späteren Stadien werden hier nur gestreift.

Bei unserm jüngsten Fötus von 10.5 mm (vgl. Fig. 1, Taf. I) sehen wir innen, dem Ventrikel benachbart, eine breite, an dunkelgefärbten Zellen reiche Schicht *M*, welche sich durch zahlreiche Kernteilungsfiguren als die Keimschicht oder Matrix zu erkennen gibt. Sie ist gegen den Ventrikel durch eine fast überall deutliche Membrana limitans interna abgegrenzt, an der sich, gewöhnlich mit einem kleinen, dreieckigen Fuße, die Fortsätze mancher in der Matrix gelegener Zellen, der Spongioblasten von His (21), inserieren. Die Zellen der Keimschicht stehen mit ihren Achsen vorwiegend radiär. Nach außen folgt eine schmale Schicht mit vorwiegend tangentialer Stellung der etwas weniger intensiv gefärbten Zellen. Diese Schicht entspricht möglicherweise der viel zellärmeren Schicht, welche His (21) beim menschlichen Embryo als »Zwischenschicht« beschrieben hat. In der nach außen folgenden Schicht *R* mit den weniger dicht stehenden, radiär gestellten Elementen dürfen wir wohl die Rindenschicht sehen, auf die nach außen der zellarme Randschleier von His folgt. Diese gleiche Anordnung der Elemente finden wir überall, im ganzen Neopallium einschließlich der medialen Hemisphärenwand, doch ist die Differenzierung der Schichten in den ventral und lateral gelegenen, an die Anlage der Streifenhügel angrenzenden Teilen ausgesprochener, das ganze Pallium hier um das Doppelte dicker (etwa 240 $\mu$) als in den dorsomedialen Partien.

Die weitere Entwicklung besteht nun im wesentlichen darin, daß sich zwischen der Matrix und der Anlage der Rinde eine breite, zellarme Zwischenschicht ausbildet, während sich die Rinde verbreitert, und zwar, wie wir mit His (21), Paton (27) und andern wohl mit Recht annehmen dürfen, zum großen Teil durch Zuwanderung von Elementen aus der Matrix, die sich ihrerseits mehr und mehr verschmälert.

Die Grenzen zwischen Matrix und Zwischenschicht und zwischen dieser und der Rindenschicht sind selbst in unserem nächsten Stadium, einem fast ausgetragenen Fötus von 20 mm Länge, noch keine scharfen. Das Gesamtpallium ist hier schon reichlich doppelt so dick wie beim jüngeren Fötus, mißt beispielsweise an der Stelle, an der sich später die Formation a der erwachsenen Rinde ausbildet (vgl. das Schema Fig. 9 auf S. 21), etwa 470 $\mu$. Davon entfällt nicht ganz die Hälfte auf die Rinde, $^2/_5$ auf die helle, zellarme Zwischenschicht und nur noch $^1/_6$ bis $^1/_7$ auf die Matrix. Zu äußerst sehen wir, wie in allen Entwicklungsstadien, eine zellarme Schicht, den Randschleier oder das Stratum zonale, gegen die sich der zellreiche

Teil der Rinde scharf abgrenzt. Dieser ist zu äußerst, unmittelbar unter dem Stratum zonale, am dichtesten, das heißt am zellreichsten; seine Kerne sind hier besonders stark färbbar. Nach innen wird die Lagerung der Zellen weniger dicht, und sie lockert sich zu innerst noch weiter, so daß der Übergang in die noch zellärmere, helle Zwischenschicht sich ohne scharfe Grenze vollzieht. Die Zwischenschicht enthält ähnliche Elemente wie die Rinde. Wir müssen es uns versagen, auf die Beschreibung der Zellen selbst einzugehen. Sie stimmen in ihrer Struktur bis ins einzelne mit den Beschreibungen und Abbildungen überein, die His von den Elementen der Hemisphärenwand des 3—4 Monate alten menschlichen Fötus gegeben hat. Besonders besteht auch der Unterschied in Form und Größe zwischen den Neuroblasten der Zwischenschicht und denen der Rindenschicht, wie sie His (21) durch Fig. 74, S. 108 veranschaulicht hat. Hier interessiert nur, daß in der Rinde folgende Schichten unterscheidbar sind:

1. Das zellarme Stratum zonale.

2. Darunter eine besonders zellreiche Schicht mit dicht stehenden Elementen, die in die dritte Schicht mit etwas weniger dicht stehenden Zellen allmählich übergeht. Weitere Schichten sind nicht zu unterscheiden. Etwas den Retziusschen (35) Wärzchen oder dem Status verrucosus corticis simplex von Ranke (34) Entsprechendes habe ich auf der Konvexität der Hemisphären weder in diesem noch in anderen Entwicklungsstadien beobachtet. Bei der Besprechung von Formatio *t*, die wohl kaum dem Neopallium zugerechnet werden darf, werden wir diese Frage noch berühren.

Bei der neugeborenen Maus ist das Pallium nur wenig dicker als in dem eben beschriebenen Stadium; es mißt an der auf Fig. 2 Taf. 1 abgebildeten Stelle wenig über $^1/_2$ mm, die Rindenschicht aber hat sich erheblich, von wenig über 200 auf 300 bis 350 $\mu$ verbreitert. Diese Verbreiterung muß auf Kosten der beiden anderen Schichten erfolgt sein, denn die Zwischenschicht hat an Breite nicht nur relativ, sondern auch absolut etwas abgenommen und ist gleichzeitig erheblich ärmer an Zellen geworden, während die Matrix auf ein einschichtiges Epithel und eine nach außen von diesem liegende, schmale Schicht von unregelmäßig angeordneten, dunkelgefärbten Elementen reduziert ist. Die Abgrenzung der Rinde gegen die Zwischenschicht, aus der nun das Marklager entsteht, ist scharf; vgl. Fig. 2 auf Taf. 1, welche eine Stelle darstellt, aus der sich später die Formation *a* der erwachsenen Maus entwickelt. Wir werden der Beschreibung

der Rinde auch in den folgenden Stadien immer in erster Linie die Befunde an dieser selben Stelle zugrunde legen.

Wir glauben diese gleiche Stelle immer zu finden, wenn wir aus den Frontalserien den Schnitt herausgreifen, der die Hemisphäre genau in der Mitte ihrer Längsausdehnung trifft und hier — den Durchschnitt durch eine Hemisphäre als Halbkreis mit lateraler Konvexität gedacht — die dorsale Rinde etwa 30° von der Mittellinie entfernt betrachten. Diese Stelle ist schon von frühen Stadien an durch besonders große Zellen in der zweituntersten Rindenschicht vor ihrer Umgebung ausgezeichnet, wie das Feld *a* der erwachsenen Rinde. — Diese Art der Bestimmung ergab uns viel zuverlässiger die gleiche Stelle als der Versuch, uns nach topographischen Beziehungen zu benachbarten Bestandteilen des Großhirns, z. B. dem Balken oder dem Ammonshorn, zu richten, Gebilden, welche sich in frühen Stadien beständig verschieben bzw. einseitig wachsen.

Da die Formation *a* zu den bestentwickelten Teilen der Rinde gehört und sich ihre Architektur auch im erwachsenen Zustande nur sehr wenig vom allgemeinen Grundplan des Neocortex entfernt, eignet sie sich besonders gut zur Darlegung der Grundzüge der Entwicklung.

Auf unserer Figur 2 sehen wir, daß die äußerste Schicht der Rinde sich wie früher durch ihre Armut an Zellen scharf absetzt. Darunter finden wir eine breite, dunkle Schicht, welche von dicht stehenden Elementen mit vorwiegend dunkel gefärbten, kleinen, runden Kernen gebildet wird. Wir nennen sie äußere Hauptzellschicht. Ohne scharfe Grenze geht diese Schicht nach unten über in eine etwas hellere, welche sehr große und relativ protoplasmareiche Elemente mit großen bläschenförmigen Kernen enthält. Diese Zellen sind, wie auch die weitere Entwicklung uns zeigen wird, die großen Zellen der Schicht V nach der Brodmannschen Zählung, der wir uns anschließen werden, der Lamina ganglionaris. Nach innen folgt nun eine sehr breite Schicht mit locker stehenden, dunkeln, kleinen Elementen. Diese Schicht enthält besonders an ihrem Übergang in die großzellige auch vereinzelte größere, hellere Zellen. Die beiden inneren Schichten der Rinde, die wir als innere Hauptzellschicht zusammenfassen könnten und aus denen, wie wir noch zeigen werden, Schicht V und VI hervorgehen, nehmen beinahe $^2/_3$ der ganzen Rindenbreite ein, während die äußere Hauptzellschicht nur wenig mehr als $^1/_4$ der Gesamtbreite ausmacht. Von einer Sechsschichtung nach Brodmann ist in diesem Stadium ebensowenig an der hier abgebildeten Stelle als an irgend einer anderen Stelle der Rinde etwas zu sehen. Die äußere Hauptzellschicht, die die Anlage von Brodmanns Schicht II bis IV darstellt, ist noch durchaus einheitlich. Die innerste Schicht der Rinde zeigt an einigen Stellen (auf unserer Figur nicht zu sehen) die

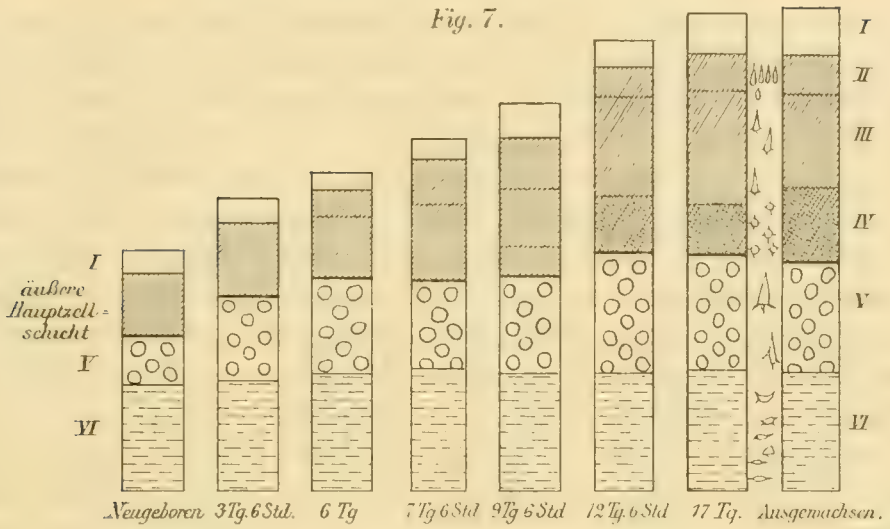
Tendenz einer Teilung in Unterschichten, indem sich zu innerst, an der Grenze gegen die weiße Substanz, ein schmaler zellenreicher Streifen bildet, der durch eine etwas zellärmere Lage von den wieder etwas zellreicheren äußeren Teilen dieser Schicht getrennt ist. An solchen Stellen kann man also im ganzen 6 Schichten zählen. Diese 6 Schichten entsprechen aber keineswegs den 6 Schichten nach Brodmanns Zählung, denn die drei untersten von ihnen sind nur Unterschichten der späteren Schicht VI. Auf die Beschreibung der Fortsätze der Zellen gehen wir nicht ein, weil die von uns angewandte Färbungsmethode darüber nicht immer genügenden Aufschluß gibt.

Ich möchte hier nur im Gegensatz zu Stefanowska (37) betonen, daß in der zweituntersten Schicht die Zellen unmittelbar nach der Geburt nicht nur radiär gerichtete Fortsätze (Schaftfortsatz und Achsenzylinder) erkennen lassen, sondern auch die Basaldendriten der hier liegenden »großen Pyramiden« schon zu dieser Zeit angelegt sind. Im übrigen gibt die Arbeit von Stefanowska, welche die Hirnrinde der Maus unmittelbar nach der Geburt und in den ersten Lebenswochen betrifft, dank der Golgischen Silbermethode über die Entwicklung der Fortsätze der Zellen viel besseren Aufschluß, als wir es können. Jene Untersuchung, die nicht, wie die unsrige auf Schichtenbildung, sondern auf die einzelnen Zellen gerichtet war, führte in einem wichtigen Punkte zu einem mit unseren Befunden übereinstimmenden Resultate, indem sie zeigte, daß auch die Zellindividuen in den untersten Schichten am frühesten, in den ersten Tagen nach der Geburt, ihre volle Entwicklung erreichen, während die Elemente der oberen Schichten erst später reif werden, so daß hier die letzten Zellen erst am 12. bis 15. Lebenstage wie die Zellen der erwachsenen Rinde aussehen.

In der weiteren Entwicklung verbreitert sich die Rinde ziemlich rasch. Die Beteiligung der einzelnen Schichten an dieser Verbreiterung ist eine sehr verschiedene. Unser Schema Fig. 7 veranschaulicht diese Verhältnisse.

Es ist gewonnen worden durch mikrometrische Messungen der einzelnen Schichten an möglichst genau entsprechender Stelle der Rinde in den verschiedenen Entwicklungsstadien. Die Vergrößerung ist eine hundertfache. Selbstverständlich sind die Grenzen zwischen den einzelnen Schichten nicht so scharf, wie sie unser Schema darstellt. Auch schwankt die Breite der Rinde und der einzelnen Schichten innerhalb ein und derselben Formation. Ich

*Fig. 7.*




Wachstum der Rinde (Formatio *a*) in den ersten Lebenswochen.

habe deshalb für jedes Schema mehrere Messungen ausgeführt, die übrigens nur sehr wenig von einander abweichende Zahlen ergaben, und habe die Durchschnittswerte eingetragen. Es sind mehr Stadien gemessen worden, als in unser Schema eingetragen sind. Die nicht eingezeichneten Zwischenstadien fügen sich genau in den Rahmen unseres Schemas ein und bestätigen die Zuverlässigkeit unserer Maße. Wir sehen also im großen und ganzen, daß die innersten Schichten schon sehr früh, in den ersten Tagen nach der Geburt ihre volle Breite erreichen, während die äußeren Schichten erst sehr viel später die Maße erlangen, welche ihnen in der Rinde des erwachsenen Tieres zukommen. Unsere Befunde stimmen hierin vollkommen überein mit den Angaben, welche Rondoni (36) über das Wachstum der Schichten in der menschlichen Hirnrinde gemacht hat. Englische Autoren (Watson (42), Bolton (1) u. a.) haben schon seit längerer Zeit die frühere Entwicklung der unteren Rindenschichten betont.

Die Verbreiterung der Schichten erfolgt im allgemeinen weniger durch Zunahme der Zahl der Elemente als durch Vergrößerung der Zellen und ganz besonders durch Zunahme ihrer Abstände, also durch Wachstum der Zwischensubstanz.

Am augenfälligsten ist in den ersten Stunden des extrauterinen Lebens die Veränderung in der untersten Schicht. Während sie beim neugeborenen

Tiere vorwiegend kleine, dunkle Kerne enthält, findet sich in ihr schon nach 25 bis 30 Stunden eine beträchtliche Zahl von größeren, bläschenförmigen Kernen mit deutlicher Membran. Die 1 bis 3 größeren Kernkörperchen und zahlreiche feine Körnchen heben sich deutlich von dem hellen Grunde ab. In einzelnen Kernen ist ein feines Chromatinnetz zu erkennen. Besonders große Elemente von ovaler, zum Teil spindeliger Form finden sich zu unterst an der Grenze der Marksubstanz. Ihre Längsachse steht tangential. Das wenige Protoplasma, das unsere Färbung darstellt, findet sich hier an den Enden der ovalen Kerne. Nach außen liegen etwas kleinere Elemente, deren Hauptachse (soweit sie nicht rundlich erscheinen) öfter radiär als tangential gerichtet ist. Die großen Elemente der zweituntersten Schicht sind auch etwas größer, aber nur wenig zahlreicher geworden. Die Vergrößerung betrifft besonders den Kern, dessen Membran und Kernkörperchen sich deutlicher von dem helleren Grunde abheben. Die äußeren Schichten haben sich gegenüber dem Zustande beim neugeborenen Tiere kaum merklich verändert.

Im folgenden Stadium von 3 Tagen und wenigen Stunden ist die Ganglienzellenschicht viel breiter geworden, ihre Elemente zahlreicher und größer (s. Fig. 3 auf Taf. I).

Auch in der innersten Schicht haben sich die Elemente noch weiter vergrößert. Die äußere Hauptzellschicht hat sich gegenüber dem neugeborenen Tier nur wenig verändert. Ihre Zellen sind etwas größer geworden, doch stehen sie noch ebenso dicht wie in den früheren Stadien. Wie dicht ihre Lagerung ist, wird einem am besten klar durch Vergleichung von Fig. 3 auf Taf. I, welche einen nur 5 $\mu$ dicken Schnitt darstellt, mit Fig. 12, Taf. III, welche die gleiche Stelle bei einem erwachsenen Tier in einem 10 $\mu$ dicken Schnitte zeigt. Trotz der doppelten Dicke des Schnittes erscheinen hier die Zellen in der äußeren Hauptzellschicht viel weniger dicht gelagert als bei der jungen Maus. Ein 10 $\mu$ dicker Schnitt läßt bei einem sehr jungen Tiere in der äußeren Hauptzellschicht die einzelnen Elemente kaum erkennen; so dicht ist ihre Lagerung. — Schon im Alter von drei Tagen sind am äußersten Saum der Hauptzellschicht die Elemente stellenweise noch ganz besonders dicht gelagert.

Bei der Maus von 6 Tagen ist die äußere Hauptzellschicht merklich breiter geworden, ihre Elemente stehen im ganzen etwas weniger dicht, besonders in den inneren Lagen dieser Schicht, die sich von den äußeren

auch durch geringere Färbbarkeit ihrer etwas größeren Zellen unterscheiden. Zu äußerst, unmittelbar unter der Molekularschicht, stehen die Zellen dichter und nehmen sie besonders dunkle Färbung an. In dieser peripheren, dichten Lage, die wir auch schon im früheren Stadium angedeutet fanden, dürfen wir vielleicht die Anlage der Brodmannschen Schicht II sehen, die bei erwachsenen Tieren kaum so deutlich ist wie hier. Noch deutlicher finden wir diese Verdichtung in den lateral anschließenden Teilen der Rinde, aus denen wir Formation *b* entstehen sehen. Die inneren Schichten der Rinde (V und VI) haben durch Zunahme der Abstände zwischen den Zellen weiter etwas an Breite zugenommen.

Bei der Maus von 7 Tagen und 6 Stunden finden wir die äußere Hauptzellschicht wieder erheblich verbreitert. Die Verdichtung unter der Molekularschicht ist noch deutlicher geworden. Die anderen Schichten haben auch ein wenig an Breite zugenommen, und zwar wieder durch Zunahme der Zwischensubstanz. Überhaupt erscheint die ganze Rinde in jedem weiteren Stadium lockerer. Einen wesentlichen Bestandteil der zunehmenden Zwischensubstanz bilden ohne Zweifel die Fasern; und wenn wir auch bei der hier angewandten Färbung diese Fasern nicht direkt zu sehen vermögen, so weist doch die Stellung der Zellen, besonders in der untersten Schicht, auf ihre Existenz hin. Die Zellen stehen hier sowohl in tangentialen wie in radiären Reihen geordnet, als lägen sie in den Maschen eines regelmäßigen Netzes von sich rechtwinklig schneidenden Fasern.

Dies Verhalten ist bei der Maus von 9 Tagen und 6 Stunden (vgl. Fig. 4, Taf. I) besonders deutlich, aber auch beim erwachsenen Tier ausgesprochen. Wir werden noch darauf zurückkommen und zeigen, daß diese Stellung der Zellen dort wirklich durch den Faserverlauf bedingt ist. Die äußere Hauptschicht ist bis zum 9. Tage wieder deutlich breiter geworden. Wir finden jetzt zum erstenmal die Andeutung einer inneren Körnerschicht, einer Schicht IV, indem zahlreiche kleine Elemente sich am inneren Rande der äußeren Hauptzellschicht unmittelbar über der Ganglienzellschicht anhäufen. Wir finden also in diesem Alter 6 Schichten. Noch deutlicher sind diese 6 Schichten in den lateral anschließenden Teilen der Rinde, aus denen sich Formation *b* entwickelt.

Bei der Maus von 12 Tagen ist die Teilung der äußeren Hauptzellschicht in 3 Schichten noch deutlicher ausgesprochen (vgl. Fig. 5 auf Taf. I).

Wir haben hier unzweifelhaft, was wir suchten, das von Brodmann postulierte sechsschichtige Durchgangsstadium in der Rinde auch dieses Tieres. Auch mit 17 Tagen finden wir die 6 Schichten noch deutlich ausgesprochen. Später lockert sich die dichte Zellenlage, die unmittelbar unter der Molekularschicht liegt, wieder auf, so daß diese Schicht II im erwachsenen Mäusegehirn weniger deutlich ist als in den beschriebenen Stadien. Im übrigen unterscheidet sich die Rinde der Maus von 17 Tagen nur wenig von der des erwachsenen Tieres. Die äußere Hauptzellschicht verbreitert sich allerdings noch um ein wenig; besonders wird die 4. Schicht noch etwas deutlicher und breiter.

Wir sehen also, daß im Entwicklungsgang des Neopallium der Maus tatsächlich an einigen Stellen 6 Schichten auftreten. Dies gilt aber nicht für alle Teile des dorsalen Hirnmantels, sondern nur für die auch im erwachsenen Zustande am höchsten differenzierten Teile desselben, besonders für die Areae *a* und *b*, während in den Feldern *c*, *d*, *k* und *l* die äußere Hauptzellschicht in keinem Entwicklungsstadium so weit differenziert ist, nie deutlicher in Schichten geteilt, als wir sie beim erwachsenen Tiere finden werden[1].

Da nun Feld *k* und ein Teil des Feldes *l*, wie wir später zeigen werden, dem entsprechen, was Brodmann beim Kaninchen als Area gigantopyramidalis auffaßt, können wir die Gültigkeit der Ansicht dieses Forschers, nach der die agranuläre Area gigantopyramidalis durch Umwandlung einer in der Entwicklung deutlich sechsschichtigen, auch eine innere Körnerschicht aufweisenden Formation zustande kommt, für die Maus nicht bestätigen.

Noch weniger als in den eben angeführten Feldern ist in anderen Teilen der Rinde von einem deutlich sechsschichtigen Durchgangsstadium irgendwann etwas zu sehen. Ich fasse deshalb die einfacher gebauten Teile des Neocortex der Maus nicht als Produkt einer Rückbildung auf, sondern halte sie einfach für weniger weit differenziert. Es erscheint mir aber trotzdem praktisch richtig, auch für die Beschreibung der weniger hoch differenzierten Teile der Rinde des Neopallium von der Sechsschichtung auszugehen und sie soweit wie möglich immer mit der sechsschichtigen Rinde zu ver-

[1] Die Lage der Felder auf der Oberfläche der Hemisphäre der erwachsenen Maus ist aus den Figuren 9, 10 und 11 auf S. 21 zu ersehen.

gleichen. Auf diese Weise erreichen wir leichter den Anschluß an höhere Formen, dessen wir für die Erforschung der Funktion besonders bedürfen. Es scheint mir dies um so gerechtfertigter, als ich beim erwachsenen Kaninchen und der erwachsenen Ratte in einem größeren Teile des Neopallium deutlich 6 Schichten sehe, wie sie Brodmann beim Kaninchen und beim Ziesel gefunden hat.

Daß die Rinde der höheren Säuger, besonders des Menschen, 6 Schichten aufweist, oder ein sechsschichtiges Durchgangsstadium durchläuft, ist von vielen Seiten nachgewiesen (O. Vogt (41), H. Vogt (40), Rondoni (36), Marinesco und Goldstein (24) und andere). Ja, selbst die Abbildungen von Autoren, die nur 5 Schichten zählen, scheinen mir deutlich 6 Schichten zu zeigen, so z. B. mehrere Abbildungen in Motts (26) Abhandlungen, in Wilsons Arbeit (23) Fig. 2a u. a. Auch für niedrigere Ordnungen ist der Nachweis von 6 Schichten mehrfach erbracht; hat doch Brodmann (9) bei einem Marsupialier (*Makropus dorsalis*) im fötalen und erwachsenen Zustande die Sechsschichtigkeit nachgewiesen und durch überzeugende Abbildungen belegt. Auch *Didelphys* besitzt nach dem gleichen Autor Sechsschichtung, allerdings in einem kleinen Ausbreitungsbezirk. Ja, sogar bei Monotremen hat Brodmann, wenn auch in modifizierter Form, Sechsschichtung konstatiert. Kappers (22) bestätigt das Vorkommen von 6 Schichten in gewissen Entwicklungsstadien von *Dasypus novem-cinctus*. Bei den Insektivoren zählt Watson (42) nur 5 Schichten; doch haben mich gerade einige Abbildungen, welche dieser Autor von der Rinde des Maulwurfes und der Spitzmaus bringt, z. B. seine Abbildungen 2, 9 und 10, davon überzeugt, daß sich auch bei dieser Ordnung stellenweise ungezwungen 6 Schichten unterscheiden lassen.

Nach B. Haller (18) stehen die Nager in der phylogenetischen Reihe auf der Grenze zwischen den Tieren mit Sechsschichtung und denen, welche einen einfacheren Grundtypus aufweisen. Bei der Maus unterscheidet dieser Forscher je nach der Stelle drei bis sechs Schichten. Wo er aber 6 Schichten unterscheidet (an einigen Stellen seines dorso-occipitalen Gebiets), entspricht seine Zählung nicht derjenigen von Brodmann, denn die Sechszahl kommt bei ihm dadurch zustande, daß er in seiner 5. Schicht (Brodmanns Schicht VI) zwei Unterschichten unterscheidet. In der Abbildung Nr. 23 der Hallerschen Arbeit (18), die unsere Formation *b* wiedergibt, sind aber mit schematischer Deutlichkeit die 6 Schichten nach Brodmannscher Zählung zu erkennen; die zweite wird aber nicht mitgezählt.

## 3. Rinde und Rindenfelder des erwachsenen Tieres.

Bei oberflächlicher Betrachtung der linken Seite von Fig. 8 (Taf. II) sehen wir zunächst 4 Schichten, 2 zellarme und 2 zellreiche, die miteinander abwechseln. Die äußerste, zellarme, ist das Stratum zonale, moleculare oder plexiforme der Autoren, Schicht I. Sie fehlt in keiner Formation, in keinem Entwicklungsstadium, ist im Paläo- und Archipallium in gleicher Weise vorhanden und ist phylogenetisch sehr alt. Die darunterliegende, breite, zellreiche Schicht ist die Schicht der kleinen und mittel-

großen (nach einigen auch der großen) Pyramiden einschließlich der Körnerschichten der Autoren. Wir unterscheiden in ihr mit Brodmann Schicht II, III und IV, denn sowohl an ihrem äußeren wie an ihrem inneren Rande zeigt sie in einigen Feldern Verdichtungen, die wir als besondere Schichten auffassen, entsprechend der äußeren (II.) und inneren (IV.) Körnerschicht Brodmanns. Schicht II ist in unserer Figur kaum angedeutet, während die dichte, kleinzellige Schicht IV deutlich ausgesprochen ist. Der darunterliegende, breite, zellarme Streifen entspricht der Schicht der großen Pyramiden einiger Autoren, während andere, so auch Brodmann, sie als Ganglienschicht bezeichnen. Wir nennen sie ebenfalls Lamina ganglionaris, Schicht V. Sie ist an der Größe und lockeren Stellung ihrer Elemente überall leicht zu erkennen. Auch die innerste zellreiche Schicht, die Spindelzellenschicht oder Lamina multiformis mancher Autoren, Schicht VI, zeichnet sich durch große Konstanz aus. Zu unterst, unmittelbar über der weißen Substanz, liegen ihre spindeligen Elemente häufig in tangentialen Reihen angeordnet, während in den äußeren Teilen dieser Schicht nicht selten eine Anordnung der Zellen in radiär gerichteten Reihen zu sehen ist. Diese Anordnung der Elemente ist durch die Verlaufsrichtung der Fasern bedingt, wie auch aus unserer Figur ersichtlich ist.

Das wichtigste Unterscheidungsmerkmal der verschiedenen Felder der Rinde liegt in der sehr verschiedenen Ausbildung und Breite der einzelnen Schichten. Besonders ist das Verhältnis der Breite der äußeren Hauptzellschicht, also der Schichten II bis IV, zu der Breite der ontogenetisch älteren, inneren Schichten V und VI, ein so wechselndes, daß wir es zur Unterscheidung der verschiedenen Strukturen mit benutzen. In unserer Figur 8 beträgt dieses Verhältnis ungefähr 42 : 58. Die äußere Hauptzellschicht ist nirgends wesentlich breiter als hier, übertrifft jedenfalls nie die beiden inneren Schichten an Breite, dagegen kann sie sehr viel schmäler sein als in der hier abgebildeten Formation, so daß sie von den inneren Schichten an Breite um das vier- und mehrfache übertroffen werden kann.

Wenn wir für die Unterscheidung der Strukturen im allgemeinen dieses Verhältnis mit berücksichtigen, wird vielleicht eingewandt werden, daß es lediglich die äußere Konfiguration der Hemisphäre ist, welche das Verhältnis bestimmt, indem bei stark konvex gewölbter Oberfläche die äußeren Schichten einen viel stärkeren Flächenzuwachs erfahren als die inneren, sie deshalb ceteris paribus dort schmäler sein können; und in der Tat sind die stark gewölbten Stellen, z. B. die Mantelkante und der Frontalpol, durch Schmalheit der äußeren Hauptzellschicht ausgezeichnet. Doch ist das Verhältnis der äußeren zu den

inneren Schichten nicht proportional der Wölbung. Die äußeren Schichten können trotz schwacher Wölbung sehr schmal sein. Wir dürfen also in dem Verhältnis der Schichten mehr sehen als nur eine Folge der Oberflächengestalt.

Wir haben in die rechte Hälfte unserer Figur 8 Zellen und Fasern eingezeichnet, wie sie sich mit den Silbermethoden in diesem Rindenfelde (*b*) darstellen lassen. Die schwarzen Zellen sind Golgipräparaten entnommen, die übrigen Fasern nach Silberpräparaten nach Cajal und Bielschowsky gezeichnet. Wenn auch die geschwärzten Zellen, um Elemente aus jeder Schicht darstellen zu können, aus mehreren Golgischnitten zusammengetragen sind, so stammen sie doch selbstverständlich alle aus einem und demselben strukturellen Felde. Wir wollen durch diese Zeichnung dem Leser vergegenwärtigen, was er sich bei Betrachtung der Zelltorsi, wie sie unsere mit Anilinfarben gewonnenen Bilder zeigen, als Ergänzung zu denken hat. Eine genaue Beschreibung dieses Faserbildes gehört nicht in den Rahmen dieser Arbeit. Sie ist in ausgezeichneter Weise wiederholt von S. Ramon y Cajal gegeben worden. Ich mache nur darauf aufmerksam, daß in den Schichten IV und VI das Netz der Fibrillen besonders dicht erscheint. Dies Verhalten ist sowohl bei Behandlung nach Cajal als nach Bielschowsky in allen Feldern des Neopallium (soweit die genannten Schichten im Zellbild ausgeprägt sind) konstant. Auch für die Beschreibung der Zellen, wie sie sich in der Rinde der Maus mit der Golgischen Silberreduktionsmethode darstellen lassen, verweise ich im übrigen auf die schönen Untersuchungen von Cajal (32, 33).

An markhaltigen Fasern ist die Rinde der Maus sehr arm. Die aus der weißen Substanz radiär in die Rinde einstrahlenden Fasern sind allerdings zum Teil markhaltig, doch verlieren sie ihr Mark schon bei ihrem Durchtritt durch die VI. und V. Schicht, so daß wir in der Regel die äußeren Schichten der Rinde völlig marklos finden. In der VI. Schicht, besonders in ihren untersten, an die weiße Substanz angrenzenden Teilen, finden wir an manchen Stellen parallel der Oberfläche ziehende markhaltige Fasern. Sie laufen zum Teil in frontaler, zum Teil in sagittaler, seltener in schräger Richtung.

## Der Bau der einzelnen Rindenfelder.

Die Felder des Neopallium der Maus lassen sich nach ihrem Bau ungezwungen in drei große Gruppen einteilen. Wir grenzen diese großen Bezirke auf unseren Zeichnungen 9—11 durch doppelte Linien voneinander ab, während die einzelnen Felder mit einfachen Linien eingezeichnet sind. Das erste Gebiet umfaßt den größten Teil der Konvexität mit Ausnahme des vordersten und mediansten Teiles derselben. Wir nennen es das dorsolaterale Gebiet. Das zweite Gebiet umfaßt den Frontalpol und den größten Teil der medialen Hemisphärenfläche und zieht sich über dem Balken und längs der Mantelkante nach hinten. Wir bezeichnen es als frontomediales Gebiet. Von diesen beiden Gebieten weicht das dritte und kleinste, das suboccipitale, im Bau stark ab. Es liegt an der Unterfläche des Hinterhauptlappens kaudal und lateral vom hinteren Balkenende, entsprechend Brodmanns Regio retrosplenialis.

Wir messen dieser unserer Einteilung keine weitergehende Bedeutung bei[1]. Sie soll uns nur die Beschreibung der einzelnen Felder erleichtern, indem sie uns ermöglicht, die Grundzüge mehrerer einander ähnlicher Strukturen gemeinsam zu betrachten.

Haller (18) hat für die Einteilung der Oberfläche des Mäusegehirns, ebenso Brodmann (9) für die Topographie der Hemisphären anderer Nager den Begriff der Insel benutzt, welche beide Autoren durch das Claustrum charakterisiert sein lassen, das sie als abgesprengtes Stück der untersten Rindenschicht betrachten. Das Gebilde, welches Haller (18) in Fig. 26 auf Taf. XXXIII als Claustrum der Maus abgebildet hat, reicht viel weniger weit nach vorn als das viel ausgedehntere und besser abgegrenzte Claustrum des Kaninchens und könnte nur dem hinteren Teile dieses Gebildes entsprechen. Mir erscheint es noch zweifelhaft, ob jene zum Teil großzellige Portion grauer Substanz hier nicht eher dem Linsenkern zuzurechnen ist. (Wir haben die Lage dieses Gebildes in der Projektion auf unserem Schema Fig. 10 durch eine punktierte Linie angedeutet.) Wie dem auch sei, als Merkmal für die Einteilung ist es für uns ganz ungeeignet, denn es liegt größtenteils unter dem Paläopallium, und soweit es unter der Rinde des Neopallium liegt, entspricht es keinem bestimmten Feld derselben. Es vereinigt heterogene und trennt zusammengehörige Formationen.

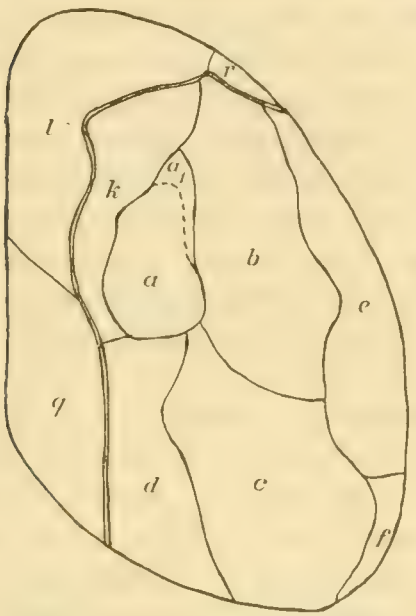
Die einzelnen Felder bezeichnen wir mit Buchstaben. Die Figuren 9, 10 und 11 zeigen ihre Lage auf der Gehirnoberfläche. Die einzelnen Strukturen sind nur ausnahmsweise scharf gegeneinander abgegrenzt. Im allgemeinen bestehen allmähliche Übergänge zwischen zwei benachbarten Feldern, und oft ist es willkürlich, wo man in diesem Übergangsgebiete die Grenze hinsetzen will. Wenn wir trotzdem auf unseren Oberflächenschemata die Grenzen als scharfe Linien zeichnen, lassen wir uns eine kleine Ungenauigkeit zuschulden kommen, wie man sie fast jedem Schema zugute halten muß.

### A. Das dorso-laterale Gebiet.

Wir haben eine Formation dieses Gebiets der Besprechung des allgemeinen Bauplanes der Rinde zugrunde gelegt, können also dafür auf das dort Gesagte verweisen. Wir sehen, daß in diesem Gebiet ein sechsschichtiger Grundplan sich erkennen läßt. Dadurch ist die Rinde hier den meisten Teilen des Neopallium der höheren Säuger viel ähnlicher als die-

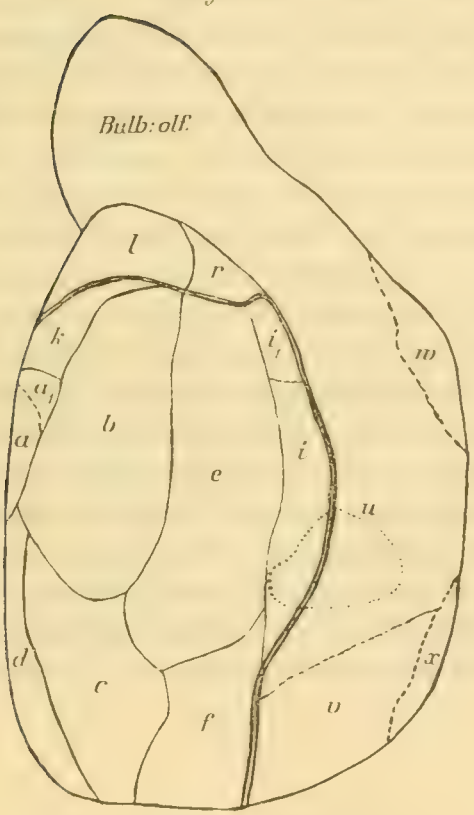
[1] Besonders soll dadurch nicht Stellung zu oder gar gegen die Hallersche Einteilung der Hirnrinde (vgl. auch Arch. f. mikroskop. Anat. Bd. 76 Heft 2) genommen werden. Hierzu würden nur viel ausgedehntere vergleichend-anatomische Untersuchungen berechtigen, als ich sie anstellen konnte. Ich kann nur sagen, daß ich jene Einteilung für meine Zwecke praktisch nicht geeignet fand.

*Fig. 9.*



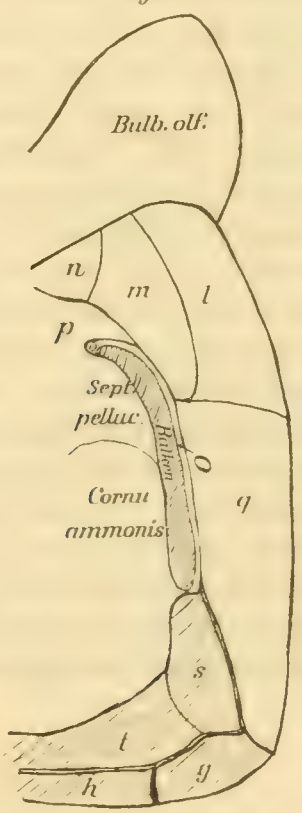

Rechte Hemisphäre, Dorsalansicht.

*Fig. 10.*




Rechte Hemisphäre, Lateralansicht.

*Fig. 11.*




Rechte Hemisphäre, Medianansicht. Die Felder *t*, *s*, *h* und *g* liegen nicht in derselben (Median-) Ebene wie die übrigen Gebilde.

jenige der anderen Gebiete, in denen die äußere Hauptzellschicht meistens so schmal ist, daß es zu einer deutlichen Differenzierung der aus ihr hervorgehenden Schichten nicht kommt. Die gute Entwicklung der äußeren Hauptzellschicht bildet das Hauptcharakteristikum unseres dorso-lateralen Gebiets. Die Breite der Rinde ist in diesem Gebiete eine mittlere, indem weder sehr breite noch sehr schmale Rindenfelder dazu gehören. Die Breite nimmt im allgemeinen von hinten nach vorn und von median nach lateral zu. Sie schwankt zwischen 0.56 mm (median und hinten) und 0.9 mm (lateral und vorn). Davon entfällt durchschnittlich $^1/_{10}$ bis $^1/_{12}$ auf die I. Schicht, $^2/_5$ auf die äußere Hauptzellschicht und die Hälfte auf die beiden innersten Schichten.

Die Struktur des Feldes *a* stellt Fig. 12, Taf. III, dar. Sie ist besonders ausgezeichnet durch große Elemente in Schicht V (die größeren unter ihnen messen bis 18 und 20 $\mu$ sowohl in radiärer wie in querer Richtung) und durch ziemlich großen Zellreichtum in allen Schichten. Man kann in dieser Formation stellenweise sämtliche sechs Schichten erkennen, denn die Zellen stehen unmittelbar unter der I. Schicht besonders dicht und deuten so die Existenz einer Schicht II an. Schicht IV mit ihren zahlreichen kleinen Elementen ist deutlich ausgeprägt. Der an diese Schicht angrenzende Streifen von Schicht V ist gewöhnlich frei von sehr großen Elementen. Diese finden sich besonders über die mittleren und tieferen Teile der Lamina Ganglionaris verteilt. Diese Verteilung ist keine ganz gleichmäßige, indem die Zellen öfter zu mehreren eine kleine Gruppe bilden. Doch tritt diese Tendenz zur Gruppenbildung nur an wenigen Stellen deutlich hervor. Die innerste VI. Schicht hebt sich durch ihre dichterstehenden kleineren Elemente deutlich ab. Die Zellen stehen mit ihren Längsachsen meist quer. In den innersten Lagen der Schicht ist eine Anordnung der Elemente in tangentialen Reihen an den meisten Stellen deutlich. Diese Anordnung ist bedingt durch den Verlauf der Fasern, ähnlich wie es Fig. 8, Taf. II, darstellt. Jene Figur stellt allerdings eine andere Formation dar, weist aber in diesem Punkte die gleichen Verhältnisse auf wie Feld *a*. Ein Teil dieser Fasern ist markhaltig. In den äußeren Teilen der Schicht VI herrscht dagegen an den meisten Stellen eine radiäre Anordnung der Elemente vor, entsprechend dem Vorwiegen der radiär verlaufenden, nur zum kleineren Teil markhaltigen Fasern. Man könnte nach dieser Anordnung der Elemente also in der VI. Schicht, zwei Unterschichten unterscheiden. Dies gilt nur

für den vorderen Teil des Feldes, im hinteren Teil verwischt sich dieser Unterschied. Das Verhältnis der äußeren Hauptzellschicht zu den beiden inneren Schichten beträgt hier etwa 48 : 52.

Frontal und lateral von Feld *a* ist eine Gegend, deren Struktur sich von *a* nur ganz unbedeutend unterscheidet, indem Schicht IV hier etwas weniger akzentuiert und die Zellen in Schicht V nicht ganz so groß sind wie in *a* (die größeren messen etwa 14 : 15 $\mu$), wenn auch größer als z. B. in *b*. Wir bezeichnen diesen Teil des Feldes als $a_1$ und grenzen ihn durch eine unterbrochene Linie vom Hauptfeld *a* ab.

Feld *b* ist dargestellt in Fig. 6, Taf. I und Fig. 8, Taf. II. Erstere stammt aus dem vorderen, letztere aus dem hinteren Teil des Feldes. Wir erkennen diese Struktur an der sehr breiten und wohlausgebildeten Schicht IV und, im Gegensatz zu Feld *a*, an der geringeren Größe der Elemente in Schicht V. Schicht II ist beim erwachsenen Tier nur ganz schwach angedeutet, während wir sie vom 9. bis 17. Lebenstage hier sehr deutlich ausgesprochen fanden. In Schicht VI lassen sich, besonders im vorderen Teil des Feldes, ähnlich wie in Feld *a*, 2 Unterschichten unterscheiden, die untere durch tangentiale, die obere durch radiäre Anordnungen der Zellen ausgezeichnet. Wir haben schon bei Besprechung des allgemeinen Bauplanes gesehen, daß diese Anordnung durch den Faserverlauf bedingt ist. Das Verhältnis der äußeren Hauptzellschicht zu den inneren Schichten beträgt hier etwa 45 : 55, ist also fast gleich wie für Feld *a*.

Lateral und hinten geht Feld *b* allmählich über in Felder von nahe verwandter Struktur. Nach hinten wird die breite und wohlausgebildete Schicht IV rasch schmaler und etwas ärmer an kleinen dunkeln Elementen, die ganze Rinde verschmälert sich — vgl. Fig. 13 auf Taf. III. Wir befinden uns in Feld *c*. Trotzdem die Rinde im ganzen schmäler ist, ist Schicht I ebenso breit wie in den vorher beschriebenen Feldern. Eine Schicht II ist nicht abzugrenzen, wohl aber sehen wir am inneren Rande der äußeren Hauptzellschicht auch hier zahlreiche kleine Elemente, welche eine Schicht IV andeuten. Gegen diese grenzt sich die helle Schicht V scharf ab. Sie enthält nur mäßig große Elemente, welche in großen Abständen stehen. Schicht VI besteht aus dichtliegenden, parallel der Oberfläche gerichteten spindelförmigen Elementen. In diesem Felde sowie in dem folgenden Felde *d* sind die Zellen aller Schichten im Durchschnitt auffallend klein. Nicht nur überwiegen in der äußeren Hauptzellschicht

die kleinsten Elemente, nicht nur sind die Zellen in Schicht V etwas kleiner als in den umgebenden Rindenfeldern, sondern sogar die Spindeln von Schicht VI, der Schicht, die am seltensten Modifikationen erleidet, sind durchschnittlich hier etwas kleiner als in den meisten anderen Rindenfeldern. Das Verhältnis der äußeren Hauptzellschicht zu den beiden inneren Schichten beträgt etwa 45 : 55.

Medial geht Feld *c* in Feld *d* über (Fig. 14, Taf. III), welche das gleiche Vorwiegen kleiner Elemente zeigt und eine so ähnliche Struktur aufweist, daß die Grenze etwas willkürlich ist. Der Unterschied zwischen den beiden Feldern besteht darin, daß in Feld *d* Schicht IV noch weniger ausgesprochen ist, Schicht V zellreicher und deshalb undeutlicher abgesetzt, so daß die äußere Hauptzellschicht nicht scharf gegen Schicht V abgegrenzt ist. Das Verhältnis der äußeren Hauptzellschicht zu den inneren Schichten ist ungefähr dasselbe wie in Feld *c*. Am medialen Rande verschmälert sich die äußere Hauptzellschicht rasch und vermittelt so den Übergang zu Struktur *q*.

Wo die Felder *c* und *d* über die hintere Mantelkante wegbiegen, um in die Formationen der Unterfläche des Hinterhauptslappens überzugehen, erleidet ihr Bau eine Modifikation. Wir haben dieses Stückchen Rinde auf unserem Schema, Fig. 11, als Feld *g* eingetragen. Die Abgrenzung der Zellschichten gegeneinander ist hier ganz undeutlich geworden, nur Schicht V ist als heller Streifen knapp wahrnehmbar. In den inneren Schichten herrscht infolge der Einstrahlung von Fasern radiäre Anordnung der Zellen vor. Die Rinde ist etwas schmäler als in den dorsalen Feldern, aber immerhin noch fast doppelt so breit wie in den Feldern des suboccipitalen Gebiets. Der Übergang in jene Felder erfolgt mit einer scharfen Grenze, die sich infolge der plötzlichen Verschmälerung der Rinde auch äußerlich markiert.

Ventral von *g* liegt ein Feld, dessen Bau nicht mehr mit dem Grundplan des dorso-lateralen Gebiets übereinstimmt und das durch seine Lage und Struktur den Übergang zum Paläopallium vermittelt. Wir nennen es Feld *h*. Die Rinde erscheint hier vierschichtig. Unter dem Stratum zonale liegt eine ziemlich mächtige zweite Schicht, welche aus 6 bis 10 Reihen von dichtliegenden, mittelgroßen und mittelstark gefärbten, länglichen Elementen besteht, welche mit ihrer Längsachse parallel der Oberfläche stehen. Darunter eine helle, scharf abgegrenzte Schicht mit nur spärlichen größeren Elementen und schließlich eine unterste Schicht mit kleineren,

spindelförmigen Elementen in tangentialen Reihen. Der vierschichtige Bau dieses Feldes deutet auf eine Verwandtschaft mit dem Paläopallium hin.

Ventral von *b*, da wo die Hemisphäre sich zum Übergang ihrer dorso-lateralen in die ventro-laterale Fläche stärker wölbt, finden wir Feld *e*. Von Feld *b*, dem es in der Struktur nahesteht, ist es besonders durch die viel schwächere Ausbildung der Schicht IV zu unterscheiden, von Struktur *c* durch die größere Breite der Rinde und besonders auch die beträchtlichere, durchschnittliche Größe der Elemente in sämtlichen Schichten, besonders den beiden innersten. Das Verhältnis der äußeren Hauptzellschicht zu den beiden inneren Schichten beträgt etwa 42 : 58, ist für die äußeren Schichten also etwas ungünstiger als in Formation *b*, *c* und *d*. Das Feld ist im ganzen in seinen vorderen Teilen zellreicher als in den hinteren. Doch ist der gesamte Bau im übrigen im ganzen Felde so gleichartig, daß ich es nicht für angebracht hielt, einen vorderen zellreicheren von einem hinteren zellärmeren Bezirk als besonderes Feld abzugrenzen.

Hinten geht Struktur *e* ohne scharfe Grenze über in Feld *f* (Fig. 15, Taf. III), welches charakterisiert ist durch unscharfe Abgrenzung der Zellschichten. Eine Schicht II ist allerdings angedeutet indem unmittelbar unter Schicht I die Elemente etwas dichter stehen, als weiter innen. In der Höhe von Schicht IV findet sich keine deutliche Verdichtung; Schicht V ist zellreicher als in anderen Strukturen, so daß sie sich gegen die äußeren Schichten nicht abgrenzt. Immerhin ist sie dank der größeren Elemente, die sie enthält, zu erkennen. Schicht VI ist von Schicht V nur undeutlich abgegrenzt. Sie besteht aus ungewöhnlich großen, gut gefärbten, meist rundlichen, zum Teil etwas länglichen Zellen, nicht aus den schmalen Spindeln, welche wir sonst in dieser Schicht antreffen.

Ventral schneidet diese Struktur mit der schon beschriebenen Fovea limbica (Fig. 15, links) scharf ab. Jenseits der Furche finden wir Strukturen des Paläopallium, die wir nicht beschreiben. Die Furche trennt also, wie schon früher erwähnt, das Neopallium vom Paläopallium. Hinten, wo die Furche tief einschneidet, geht dieser Übergang scharf und unvermittelt vor sich; weiter vorn aber, an der ventralen Seite von Feld *e*, wo die Furche seichter ist, ist auch im Zellenbau der Übergang mehr verwischt. Er vollzieht sich allmählich im schmalen Feld *i*. das auch in seiner Struktur in der Mitte zwischen Neo- und Paläopallium steht.

Fig. 16, Taf. III zeigt uns die Struktur des Feldes *i*. Die Rinde ist schmal. Unter der ziemlich breiten Schicht I findet sich eine Lage von dichtstehenden, stark getärbten Zellen von zum Teil dreieckiger Form. Darunter folgt eine breite zellenarme Schicht, in deren unteren Teilen etwas größere, dichter stehende Elemente auftreten, so daß die Grenze nach der untersten Schicht, welche hier, wie gewöhnlich, von tangential gerichteten Spindeln gebildet wird, keine scharfe ist. Ventral geht das Feld über in die deutlich vierschichtigen Formationen des Paläopallium.

Im vordersten Teile des Feldes, das wir als $i_1$ auf unserem Schema Fig. 10 abgegrenzt haben, ist die Struktur etwas modifiziert, indem die beiden untersten Schichten der hier im ganzen breiteren Rinde auch relativ breiter sind und eine radiäre Anordnung ihrer Elemente aufweisen, welche, wie auch hier leicht nachweisbar ist, durch Einstrahlung von Fasern bedingt ist.

Feld *a* geht an seiner medialen Seite allmählich in Feld *k* über (Fig. 19, Taf. V). Dieses Feld bildet den Übergang zwischen den Formationen des dorso-lateralen und des fronto-medialen Gebiets und steht nicht nur topographisch, sondern auch in seiner Struktur auf der Grenze zwischen beiden. Die Zellen stehen in allen Schichten um ein geringes weniger dicht als in Feld *a*. Die äußerste Hauptzellschicht ist bedeutend schmäler als in den Feldern des dorso-lateralen Gebiets. Ihr Verhältnis zu den inneren Schichten beträgt ungefähr 34 : 66. Schicht I ist erheblich breiter als in Feld *a* und *b*. Schicht II, III und IV sind nicht deutlich voneinander zu unterscheiden. Wohl steht unmittelbar unter Schicht I eine an manchen Stellen besonders dichte Reihe von Zellen, die als Schicht II angesprochen werden kann; auch finden sich am inneren Rande der Hauptzellschicht die gleichen kleinen Elemente, wie sie in Feld *a* die Schicht IV bilden, doch sind sie in zu kleiner Zahl vorhanden, als daß sie den Eindruck einer eigenen Schicht hervorrufen könnten. Schicht V und VI sind erheblich breiter als in den bisher beschriebenen Feldern. Die großen Elemente von Schicht V sind allerdings nicht ganz so groß (etwa $13 \times 15$ $\mu$) und zahlreich, wie in der Formation *a*, doch sind sie immerhin größer als in den meisten anderen Areae. Sie sind über die ganze Breite der breiten Schicht V verteilt. Die äußersten liegen infolge der großen Breite der unteren Schichten viel weiter nach außen als die entsprechenden Elemente, die wir in andern Formationen kennen gelernt haben. Die Orientierung der spindeligen Ele-

mente der Schicht VI ist im hinteren Teile des Feldes die gleiche wie im Feld *a*; nur sind die horizontalen Reihen nicht ganz so deutlich wie dort. Im vorderen Teil der Area *k* herrscht eine Anordnung in radiären Reihen in der ganzen Schicht vor. Wie die Faserpräparate zeigen, ist diese Anordnung auch hier durch den Durchtritt zahlreicher, nur zum geringsten Teil markhaltiger Fasern bedingt.

### Das frontomediale Gebiet.

Die Formationen dieses Gebietes sind charakterisiert durch die Schmalheit der äußeren Hauptzellschicht, die Breite der beiden innersten Zellschichten und die durch überall zahlreich einstrahlende Fasern bedingte gesetzmäßige Anordnung und Orientierung der Elemente der untersten Strata. Die Begrenzung der einzelnen Schichten ist viel weniger deutlich als im dorso-lateralen Gebiet; besonders sind die Schichten, welche sich aus der hier schmalen äußeren Hauptzellschicht differenzieren, oft kaum zu erkennen und nur dadurch zu identifizieren, daß man die einzelne Schicht aus dem dorso-lateralen Gebiet in das fronto-mediale herüber verfolgt.

In diesem Gebiete erreicht die Rinde ihre größte Gesamtbreite von etwas über 1 mm (am Frontalpol). Nach hinten wird die Rinde viel schmäler und sinkt in dem hinteren Teil der Formation *q* auf $^1/_3$ mm herab; noch stärker verschmälert sie sich an der medialen Hemisphärenfläche, wo sie nach unten in das Paläopallium übergeht.

Die Molekularschicht ist im ganzen breiter als im dorso-lateralen Gebiet nnd macht durchschnittlich etwa $^1/_7$ der ganzen Breite aus, während auf die äußere Hauptzellschicht an den meisten Stellen kaum $^1/_4$, auf die beiden inneren Schichten weit über die Hälfte der ganzen Breite entfällt.

Auf Fig. 17, Taf. IV sehen wir den Übergang des Feldes *k* (links) in Feld *l*, welches seinerseits (rechts unten) in Feld *m* übergeht. In Feld *l* scheint uns zunächst auf diesem Frontalschnitt die Abgrenzung der einzelnen Schichten fast unmöglich zu sein, abgesehen allerdings von Schicht I und II, von denen die letztere besonders nahe dem Übergang in Feld *m* viel deutlicher ist als in den bisher beschriebenen Formationen. Die anderen Schichten sind aber — auf dem Frontalschnitt — zunächst nicht ohne weiteres zu identifizieren, sondern nur zu erkennen, wenn man die einzelnen Strata von Formation *a* und *k* in Formation *l* verfolgt. Dabei wird man gewahr, daß die gleichen Elemente, welche in Formation *a* Schicht IV

ausmachen, sich in geringerer Zahl auch hier finden, aber erheblich weiter nach außen, so daß die äußere Hauptzellschicht, deren innere Grenze ja diese Elemente bilden, hier sehr schmal ist. Ihr Verhältnis zu den inneren Schichten beträgt, an der Mantelkante gemessen, etwa 23 : 77. Die Elemente von Schicht V sind dementsprechend noch weiter nach außen gerückt als in Formation *k*. Sie messen im vorderen Teile des Feldes nicht mehr als 12 × 14 $\mu$, während sie im hinteren Teile noch etwas kleiner sind, also den entsprechenden Zellen der Formation *k* etwas an Größe nachstehen. Daß diese Elemente wirklich den großen Elementen in Feld *a* usw. entsprechen, beweist nicht nur der kontinuierliche Zusammenhang der betreffenden Schichten, sondern dafür sprechen auch besonders die Golgipräparate, welche hier ziemlich große pyramidenförmige Ganglienzellen zeigen, die einen Achsenzylinder in die weiße Substanz aussenden, genau wie wir sie in Fig. 8, Taf. II für die V. Schicht von Feld *b* dargestellt haben und wie sie sich in der Lamina ganglionaris aller Formationen des dorso-lateralen Gebietes nachweisen lassen. In Schicht V zeigt sich deutlich eine Anordnung der Zellen in radiär gerichteten Reihen. Diese Anordnung beherrscht (bei der Betrachtung im Frontalschnitt) die ganze, hier sehr breite Schicht VI, die wir hier nicht auf den ersten Blick erkennen. Sagittalschnitte tun uns aber unzweifelhaft dar, daß wir hier wirklich eine breite und wohl ausgebildete Schicht VI vor uns haben, charakterisiert durch die genau gleichen spindelförmigen Elementen, wie wir sie in den bisher beschriebenen Feldern getroffen haben. Diese Spindeln sind hier streng sagittal gerichtet, so daß sie auf dem Frontalschnitt quer getroffen sind und als kleine rundliche Elemente erscheinen, während sie sich im Sagittalschnitt als schöne große Spindeln zeigen, die eine besonders breite, deutlich ausgesprochene Spindelzellenschicht bilden. Diese eigentümliche Anordnung der Elemente ist wiederum durch den Faserverlauf bedingt, denn es strahlen in der Gegend der Mantelkante einerseits — in der Nähe des Frontalpols, auch seitlich davon — zahlreiche, zum größeren Teil marklose Fasern in frontaler Ebene fächerförmig aus der weißen Substanz in die Rinde ein. Anderseits verlaufen zwischen den Strahlen dieses Fächers in streng sagittaler Richtung zahlreiche, nur zum geringsten Teil markhaltige Fasern in der Schicht VI. In diese sagittalen Faserzüge eingelagert liegen die spindelförmigen Zellen in entsprechender Orientierung.

Diese gleiche Anordnung der Fasern besteht auch in der innersten Schicht der Formation *q*, und wir werden bei der Beschreibung jenes Feldes auf das hier Gesagte verweisen.

Am Frontalpol ist die Anordnung der sagittalen Fasern eine mannigfachere. Manche laufen um das vordere Balkenende nach unten, viele wenden sich nach lateral, so daß sie schließlich beinahe in frontaler Ebene verlaufen, andere strahlen am vorderen Balkenende nach verschiedenen Richtungen radiär in die Rinde ein. Deshalb sind dort die Spindeln der Schicht VI nicht streng in einer Richtung orientiert, wie im hinteren Teile des Feldes, so daß sich hier bei verschiedenen Schnittrichtungen Spindeln zeigen.

B. Haller (18) nimmt an, daß die unterste Zellschicht der eben beschriebenen Area *l* (des Stirngebietes und des Fornikalgebietes seiner Nomenklatur) der »Sternzellenschicht«, also der drittuntersten Schicht seines dorso-occipitalen Gebiets, entspricht, mit anderen Worten, daß die unterste Schicht der eben beschriebenen Formation der Schicht IV unserer Area *a*, *b* usw. entspreche. Ich sehe nicht ein, wie diese Schichten miteinander in Zusammenhang gebracht werden können. Die unterste Schicht des »Fornikalgebiets und Stirngebiets« entspricht der untersten Schicht auch des übrigen Neopalliums. Diese nächstliegende Annahme wird nicht nur durch den in der ganzen Rinde des Neopallium kontinuierlichen Zusammenhang dieser untersten Schicht, sondern auch durch die überall gleiche Form der meisten in ihr liegenden Elemente bewiesen.

Im Fibrillenpräparat nach Cajal zeigt diese Formation auch außer den schon beschriebenen Fasersystemen in den untersten Schichten besondere Verhältnisse, indem sich in der Höhe, die der äußeren Grenze der Schicht IV entspricht, ein deutliches Fibrillennetz imprägniert und die Schicht I entlang der Mantelkante und nahe derselben an der Wand des Sulcus sagittalis besonders reich an tangentialen Fasern erscheint. Es ist möglich, daß dieses Verhalten hier weniger durch besondere Beschaffenheit des Gewebes bedingt ist als dadurch, daß für das Eindringen der Reagenzien infolge des Aneinanderliegens der beiden Hemisphären hier andere mechanische Verhältnisse bestehen, die auf zunächst unerklärliche Weise die Imprägnation begünstigen könnten. Wir haben auch an Golgipräparaten häufig längs des Sulcus sagittalis und der Mantelkante besonders reiche Imprägnation bekommen, was wohl eher aus der äußeren Konfiguration dieser Teile als durch besondere Beschaffenheit des Gewebes zu erklären ist.

Der Übergang des Feldes *l* in Feld *m* (Fig. 17 u. 20, Taf. III u. IV) ist ein so allmählicher, daß die Abgrenzung nicht leicht ist. In *m* ist die Rinde im ganzen schmäler. Die Schicht I ist aber breiter als in der Formation *l*. Die Zellenschichten zeichnen sich durch gleichmäßige, ziemlich beträchtliche Größe der Elemente und durch ziemlich dichte Stellung derselben aus, und ferner dadurch, daß sämtliche Zellen sich leicht und gleichmäßig färben.

Während in anderen Feldern die einen Elemente heller, die anderen dunkler, andere vielleicht ganz unvollständig gefärbt erscheinen, so daß nur der Kern zu erkennen ist, erscheint in Formation *m* von jedem einzelnen Element sowohl Kern wie Protoplasma schön gleichmäßig in einem mittleren Ton gefärbt. Dies Verhalten kehrt in allen unseren zahlreichen Serien wieder, kann also nicht auf einer technischen Zufälligkeit beruhen. Diese gleichmäßige, leichte Färbbarkeit werden wir auch in den angrenzenden Formationen wiederfinden. Sie ist ferner charakteristisch für alle Felder des Paläopallium. Es ist möglich,

daß die leichte Färbbarkeit von Formation *m*, *n*, *o*, *p* usw. auf die Verwandtschaft mit jenen phylogenetisch älteren Teilen der Rinde hindeuten, denen sie schon topographisch und dem Bau nach näherstehen.

Schicht II und VI sind allein deutlich ausgesprochen. II besteht aus 2 bis 3 Reihen von ziemlich großen ovalen, mit der Längsachse radiär stehenden Zellen, die breite Schicht VI aus zahlreichen (10—12) Reihen von großen, kurz spindelförmigen oder ovalen Elementen, die mit ihren Längsachsen tangential stehen. Dazwischen lassen sich Schichten nicht deutlich unterscheiden, denn die Zellen sind über die übrige Breite der Rinde ziemlich gleichmäßig verteilt. An der Grenze zwischen dem mittleren und äußeren Drittel der ganzen Breite sind die Zellen besonders groß, und vielleicht dürfen wir darin ein Analogon der Schicht V erkennen, denn diese Zellage läßt sich durch Feld *k* und *l* kontinuierlich in Schicht V des Feldes *a* verfolgen.

Hinten unten, vgl. Fig. 11 auf S. 21, grenzt an Feld *m* das Feld *p*, das kaum mehr neopallialen Charakter hat. Die Grenze zwischen *m* und *p* ist durch eine »innere Furche« markiert, welche wir schon auf S. 7 erwähnt haben. In Formation *p* ist die Rinde sehr schmal. Sie besteht aus einer sehr breiten Schicht I und aus einer darunterliegenden sehr breiten, aus 6 bis 7 Reihen dunkelgefärbter, ziemlich großer Zellen bestehenden Schicht, die in der Lage also Schicht II des Neopallium entspricht. Darunter folgt eine lockere Schicht von etwas kleineren Elementen und zu unterst eine zellreiche Schicht von gleicher Beschaffenheit wie Schicht VI in Formation *m*. Wir haben also nur 4 Schichten, von denen die beiden äußersten besonders stark sind. Diese Struktur ist charakteristisch für die Formationen des Paläopallium, denen wir Feld *p* wohl schon zurechnen müssen.

An seiner ventralen Seite geht das Feld kontinuierlich in Formation *w* über, die unzweifelhaft dem Paläopallium angehört. Nach hinten, über dem Balken, setzt sich die Schicht II der Formation *p* kontinuierlich in die Fasciola cinerea (*o*) fort. Diese ist ein paariges, aus großen, gutgefärbten, zum Teil pyramidenförmigen Zellen bestehendes schmales Band, das sich über dem Balken, zwischen ihm und Formation *l*, weiterhin zwischen Balken und Formation *q* beiderseits hinzieht. Nach hinten geht sie, wie besonders Sagittalschnitte, die die Fasciola in ihrer ganzen Länge getroffen haben, schön dartun, um das Splenium corporis callosi in die Pyramidenschicht des Ammonshornes kontinuierlich über und vermittelt so einen ununterbrochenen Zusammenhang zwischen der Zellenschicht des Ammonshornes und der Schicht II unserer Formation *p*.

Nach unten grenzt das Feld *m* an das Feld *n* (vgl. Fig. 11 auf S. 21). Wie das vorher beschriebene, vermittelt auch dieses Feld den Übergang zum Paläopallium. Sein Bau ist dementsprechend ein relativ einfacher.

Schicht I ist breit. Schicht II ist besonders mächtig und besteht aus 6 bis 10 Lagen stark gefärbter, mäßig dicht liegender, mittelgroßer Elemente. Darunter finden wir eine zellärmere Zone und zu unterst wieder eine zellreiche Schicht. Wir können also auch hier, ähnlich wie im Paläopallium, nur 4 Schichten unterscheiden. Die Anordnung der Elemente in den beiden untersten Schichten ist eine radiäre, entsprechend der hier sehr reichlichen Ausstrahlung von größtenteils marklosen Fasern.

In gleicher Höhe mit Feld *n* liegt lateral Feld *r* (Fig. 10, S. 21 und Fig. 21, Taf. V) von *n* durch die früher erwähnte Fovea olfactoria getrennt. Formation *r* vermittelt den Übergang des angrenzenden Feldes *l* in das Palläopallium. Es ist von einfachem Bau, schmäler[1] und zellärmer als Feld *l*, wenn auch nicht so einfach in seiner Struktur wie Feld *n*. Auf eine schmale Schicht I folgt eine deutlich ausgesprochene II. Schicht, welche aus 2 bis 4 Reihen dichtliegender, stark gefärbter Elemente besteht. Darunter folgen mehrere Reihen lockerer stehender, kleinerer Elemente. Diese beiden Schichten entsprechen zusammen, wie man durch Verfolgen des Zusammenhangs mit den Schichten der höher differenzierten Areae ermitteln kann, der Schicht II bis IV, also der äußeren Hauptzellschicht. Darunter folgt eine ziemlich breite Schicht mit locker stehenden großen Elementen, entsprechend Schicht V, und schließlich eine breite Schicht, größtenteils spindelförmiger Elemente, entsprechend Schicht VI. Die Anordnung der Zellen in diesen beiden innersten Schichten ist eine radiäre, wiederum entsprechend der Einstrahlung zahlreicher markloser und spärlicher markhaltiger Fasern aus der weißen Substanz.

Das Verhältnis der äußeren Hauptzellschicht zu den beiden inneren Schichten beträgt etwa 22 : 78. Diese Formation hat also große Ähnlichkeit mit der angrenzenden Formation *l* und könnte auch als ein zellärmerer Teil derselben aufgefaßt werden.

Die hinteren Teile der Mantelkante nimmt Feld *q* ein (Fig. 18, Taf. IV). Der Übergang zu Feld *l* erfolgt so unmerklich, daß eine Grenze schwer zu ziehen ist. Weiter entfernt von dieser Grenze unterscheiden sich aber die beiden Felder beträchtlich. Die Struktur von *q* unterscheidet sich von der des Feldes *l* durch die geringere Breite der Rinde, durch besonderen Charakter der Schicht II und der übrigen Bestandteile der äußeren Haupt-

[1] Fig. 21 stellt einen Schrägschnitt dar, so daß die Rinde zu breit erscheint.

zellschicht und schließlich durch die beträchtlichere Größe der Zellen in Schicht V. Schicht II hebt sich viel deutlicher ab als in Formation *l*. Sie besteht aus 2 bis 4 Reihen von rundlichen, stark sich färbenden, sehr kleinen Elementen (5 bis höchstens 6 $\mu$), deren Hauptfortsätze, soweit solche zu sehen sind, keine regelmäßige Orientierung erkennen lassen, während sich die entsprechende Schicht in Feld *l* viel weniger deutlich abhebt und aus sehr viel größeren (durchschnittlich etwa 8 : 13 $\mu$), viel schwächer sich färbenden, länglichen, oft pyramidenförmigen Elementen besteht, deren Längsachse immer radiär gerichtet ist. Unter den dichten Reihen der II. Schicht liegen in Feld *q* viel lockerer angeordnet etwa 3 bis 4 Reihen ebenso kleiner, rundlicher Elemente, auf die noch einige mittelgroße, helle, zum Teil pyramidenförmige Zellen folgen. Es ist mir nicht möglich, zu sagen, welchen Schichten der anderen Formationen die einzelnen der drei eben beschriebenen Schichten entsprechen. Sicher ist nur, daß sie zusammen der äußeren Hauptzellschicht, der Schicht II bis IV, gleichzusetzen sind, denn nach innen folgt eine deutliche Lamina ganglionaris mit hier sehr großen, locker stehenden Zellen. Nächst den großen Zellen der Formation *a* sind es die größten Elemente im Neopallium der Maus. Manche von ihnen messen 15 × 18 $\mu$. Diese Schicht setzt sich ununterbrochen in die V. Lage der übrigen Rinde fort. Sie enthält, wie auch die folgende Schicht, weniger zahlreiche Elemente als die entsprechende Schicht in Feld *l*. Schicht VI ist wiederum sehr breit. Ihre spindelförmigen Elemente sind genau wie in Formation *l* streng sagittal gerichtet und in radiären Reihen angeordnet, so daß die Lage nur in Sagittalschnitten als solche imponiert, während, wie unsere Fig. 18 zeigt, auf Frontalschnitten ihre Elemente kleiner erscheinen, die Abstände zwischen ihnen infolgedessen erheblich größer, so daß der Eindruck einer Schicht kaum zustande kommt.

Für die Beschreibung der Fasern in diesen Schichten können wir auf das bei der Beschreibung von Feld *l* Gesagte verweisen. In den oberen Schichten zeigt diese Formation im Fibrillenbild 2 dichte Fasernetze. Das eine liegt in Schicht I und besteht hauptsächlich aus tangential verlaufenden Fasern, das andere liegt im unteren Teile von Schicht II und unmittelbar darunter und besteht aus sehr dicht liegenden, in allen Richtungen sich kreuzenden Fasern, welche die hier gelegenen Zellen umspinnen. Das Markscheidenpräparat zeigt in diesem Felde unmittelbar über dem Balken und am Übergang in Formation *s* in der ersten Schicht zahlreiche tangential verlaufende Fasern. Das Verhältnis der äußeren Hauptzellschicht zu den inneren Schichten beträgt etwa 28 : 72.

## Das suboccipitale Gebiet.

(Brodmanns Regio retrosplenialis.)

Die Ausdehnung dieses Gebiets kommt in der Medianansicht infolge der konvexen Wölbung dieser Region nur unvollständig zum Ausdruck, indem der obere Teil mehr nach unten als medialwärts orientiert ist, so daß er in unserem Schema Fig. 11 auf S. 21 stark verkürzt erscheint. Die konkave Wölbung dieses Bezirkes ist von Hermanides und Köppen als eine Andeutung eines Sulcus calcarinus aufgefaßt worden. Mir scheint sich die gewölbte Form durch das Anliegen des Mittelhirns genügend zu erklären, und jene Annahme unnötig zu sein. Das Gebiet umfaßt die Felder mit der schmalsten Rinde (0.2 bis 0.3 mm).

Der Zellenbau weicht erheblich von dem der übrigen Rindengebiete ab. Brodmann hat auch die Struktur dieser seiner Regio retrosplenialis (zum Beispiel beim Kaninchen) auf den sechsschichtigen Typus zurückgeführt. Mir will das bei der Maus nicht ganz gelingen. Zwar sind die stark ausgeprägten Schichten I und II ohne weiteres mit den entsprechenden Schichten der übrigen Rinde zu identifizieren, gehen sie doch nicht nur ununterbrochen in die entsprechenden Schichten von Formation *q* über, sondern besitzt doch Schicht II auch größte Ähnlichkeit mit der zweiten Lage von Feld *q*. Auch die beiden untersten Schichten sind leicht mit Schicht V und VI der übrigen Rinde, in die sie kontinuierlich übergehen, zu identifizieren. Was aber dazwischen liegt, was Schicht III und IV entsprechen müßte, kann ich nicht im sechsschichtigen Schema unterbringen.

Der Kortex dieser Region ist also charakterisiert durch Schmalheit des Gesamtquerschnitts, relative Breite der ersten Schicht, Schmalheit und geringe Differenzierung der äußeren Hauptzellschicht mit starker Ausprägung ihres äußeren Saumes (Schicht II) und schließlich durch die durchschnittliche Kleinheit der Zellen, besonders der äußeren Schichten.

Fig. 22, Taf. V zeigt uns die Formation *s*, wie sie sich auf einem Sagittalschnitte darstellt. Auf ein ziemlich breites Stratum zonale, das, wie in den benachbarten Teilen der Formation *q*, zahlreiche markhaltige, tangential verlaufende Fasern enthält, folgt eine Lage sehr dicht stehender, kleiner, dunkelgefärbter, rundlicher Elemente, eine Schicht also, die genau der Schicht II von Formation *q* gleicht, in die sie sich auch ununterbrochen fortsetzt. Darunter wieder, wie in Formation *q*, einige Reihen lockerer

liegender, kleiner, etwas heller gefärbter Elemente, weiter eine helle Schicht mit locker liegenden, größeren Zellen, die allerdings lange nicht die Dimensionen der großen Elemente in Schicht V der Formation *q* erreichen und schließlich eine Schicht mit kleinen, dunkeln, zum Teil spindelförmigen Zellen, welche der untersten Schicht des übrigen Neopallium entsprechen mag.

Eine Ähnlichkeit mit Feld *q* besteht auch darin, daß die Molekularschicht im Fibrillenpräparat hier besonders reich an tangentialen Fasern erscheint, und daß der untere Teil der Schicht II und die anschließende Schicht ein Fasernetz enthält, das allerdings lange nicht die gleiche Dichtigkeit aufweist wie in den entsprechenden Lagen von Formation *q*. Den Befunden im Fibrillenbilde könnte man jede Bedeutung absprechen, indem man sie als bloßes Spiel der Laune dieser etwas unzuverlässigen Färbungsmethoden hinstellt. Es ist aber doch auffallend, daß sich sowohl beim Bielschowskyschen als beim Cajalschen Verfahren immer an den gleichen Stellen besonders dichte Netze imprägnieren. Wer den Befund nicht auf eine Besonderheit der Struktur des Gewebes an dieser Stelle zurückführen will, muß doch mindestens eine konstante chemische oder physikalische Eigentümlichkeit dieser Gewebspartien annehmen, um eine Erklärung dafür zu finden, eine Eigentümlichkeit, welche mit der Funktion dieser Teile zusammenhängen könnte.

In seinen vorderen Partien geht dieses Feld lateral und unten in das Ammonshorn über und bildet so den Übergang zwischen Neo- und Archikortex.

Hinten, lateral und unten schließt sich ohne scharfe Grenze an Feld *s* Feld *t* an (Fig. 23, Taf. V). Schicht I ist hier ungefähr gleich breit wie in Feld *s*. Schicht II ist dadurch ausgezeichnet, daß sie nicht eine zusammenhängende Lage bildet, sondern sich ihre Elemente in dichten Gruppen zusammenhäufen, die sich in die Molekularschicht vorwölben. Der äußere, vorspringende Teil dieser Gruppen ist also durch einspringende Fortsätze der zonalen Schicht von den Nachbarn getrennt, während der innere Teil durch Partien von geringem Zellgehalt mit den benachbarten Gruppen im Zusammenhang steht. Diese Zellgruppen bestehen aus ovalen Elementen von mittlerer Größe und Färbbarkeit, und man könnte diese Gebilde mit den Retziusschen Wärzchen bzw. dem Status verrucosus corticis simplex von Ranke (34) vergleichen. Besonders in den ersten Lebenstagen, wo wir die Wärzchen besonders stark vortretend und besonders zellreich finden, ohne daß sie, wie beim erwachsenen Tiere, an ihrer Basis an zellärmere

Teile angrenzten, besteht eine gewisse Ähnlichkeit mit den Wärzchen in der Rinde des menschlichen Fötus von vier bis fünf Monaten.

Nach innen folgt auf diese Zellhäufchen zunächst eine weitere zellreiche Lage, in der die Zellen aber etwas lockerer liegen, auf diese ein zellarmer Streifen und zu unterst schließlich wieder eine zellreichere Lage. In diesen drei unteren Schichten liegen durcheinander Elemente von verschiedener Größe und Form. Die meisten sind mittelgroß, rundlich oder oval, einige aber größer und ausgesprochen pyramidenförmig. Die leichte Färbbarkeit des streng radiär orientierten Schaftfortsatzes dieser Zellen erinnert an die Verhältnisse bei den großen Pyramiden des benachbarten Ammonshornes.

Wir haben also auch in Feld *t* eine Formation von weniger weit differenziertem Bau vor uns, die sowohl topographisch als durch ihre Struktur den Übergang zu den archipallialen Formationen vermittelt, denen es wahrscheinlich schon zugerechnet werden muß. Das Feld ist ventralwärts sehr weit ausgedehnt und ist in den ventralen Teilen vollständig von Feldern umgeben, die unzweifelhaft dem Archipallium angehören.

## 4. Die Lokalisation von Funktionen.

Über die Funktion einzelner Bezirke des Neopalliums der Maus wissen wir zur Zeit noch gar nichts Bestimmtes, obschon die Literatur schon eine stattliche Reihe von Vermutungen und Behauptungen über die physiologische Bedeutung dieses und jenes Feldes bei Mus und bei anderen Nagern enthält.

### Das motorische Zentrum.

Ramon y Cajal (30) hält ein großes Feld, welches ungefähr $^2/_3$ der Konvexität der Mäusehirnrinde einnehmen soll, für die sensibel-motorische Zone. Als Hauptcharakteristikum dieser Bewegungsrinde betrachtet er das Vorhandensein eines sensiblen Endplexus, eines Plexus, welcher, nach seinen Abbildungen zu schließen (Fig. 30, S. 91), demjenigen entspricht, welchen wir in unseren Feldern *a*, $a_1$ und *b* in der Höhe unserer IV. Schicht und unmittelbar darüber regelmäßig mit der Cajalschen und der Bielschowskyschen Silbermethode imprägniert gefunden haben. Was Cajal als motorische Zone betrachtet, entspricht also ungefähr unseren Feldern *a*, $a_1$ und *b* und reicht über diese Felder hinaus bis zur Mantelkante.

Eine noch weitere Ausdehnung nimmt die motorische Region der Maus nach Döllken (11) ein. Sie umfaßt, wenn ich die Schemata dieses Autors mit meinen Diagrammen vergleiche, den größten Teil unserer Felder *l*, *k*, *a*, $a_1$ und *b* und erstreckt sich noch über den vorderen Teil von *q*, *d* und *c*. Den motorischen Charakter dieses Bezirkes erschließt Döllken daraus, daß die Fasern, welche aus dem Hirnstamm hier einstrahlen, sich am frühesten nach der Cajalschen Silberreduktionsmethode imprägnieren, und daß hier auch am frühesten Markscheiden auftreten. Gestützt also auf das Flechsigsche Gesetz, dessen Gültigkeit hier auch auf das Auftreten der marklosen Fibrillen ausgedehnt wird, grenzt Döllken die motorische Zone in der angegebenen Weise ab. Auch einem Fasernetz, das er allerdings nur in einem Teil seiner motorischen Rinde findet und welches allem Anschein nach dem erwähnten »sensiblen Endplexus« von Cajal entspricht, mißt er die Bedeutung eines Kriteriums für den motorischen Charakter jenes großen Rindenfeldes bei. Mir scheinen die Voraussetzungen, von denen Döllken ausgeht, viel zu unsicher zu sein, als daß sie berechtigen könnten, mit so großer Bestimmtheit weitgehende Schlüsse darauf zu bauen, wie es dieser Autor tut. Döllken sagt auch, daß seine Befunde sich mit denen der Physiologie decken. Wir haben in der Literatur keine Mitteilungen über physiologische Versuche an der motorischen Sphäre der Maus finden können, die uns diese Aussage hätten erklären können.

Eine viel geringere Ausdehnung schreibt Brodmann der motorischen Rinde bzw. der Area gigantopyramidalis der Nager zu. Dieser Forscher hat die Rinde des Kaninchens und des Ziesels auf ihren Zellenbau untersucht. Nach seinem Oberflächendiagramm, Fig. 107—109 (9), zu schließen, entspricht die Area gigantopyramidalis dieser beiden Tiere in der Lage ungefähr meinem Feld *k* und dem hinteren und dorsalen Teile meines Feldes *l* bei der Maus. In Fig. 30 der gleichen Abhandlung bildet er einen Schnitt durch diese Region beim Kaninchen ab. Der Bau dieser Stelle entspricht, wie ich mich an entsprechenden Schnitten durch die Rinde des Kaninchens überzeugt habe, genau meiner Formation *k* bei der Maus, und ich zweifle nicht daran, daß Brodmann diese der motorischen Region zurechnen würde. Er würde allerdings wahrscheinlich die mediane Grenze weiter medianwärts verschieben, d. h. ein Stück meines Feldes *l* mit dazurechnen. Die Abgrenzung der motorischen Zone bei den Nagern

ist auch einem erfahrenen Untersucher wie Brodmann nicht leicht gefallen. Er hat ihre Grenzen in seiner V. Mitteilung im Jahre 1906 (6) beim Ziesel etwas anders gesteckt als 4 Jahre später in seiner zusammenfassenden Darstellung. Man vergleiche Fig. 1 auf S. 352 der V. Mitteilung mit Fig. 108 auf S. 191 der Monographie. Das Zurücktreten der Körnerschicht, die ziemliche Größe der Elemente in Schicht V, die Zellarmut des ganzen Querschnitts, die beträchtliche Breite der Rinde, vielleicht auch die auf dem Frontalschnitt unscharfe Abgrenzung zwischen Rinde und weißer Substanz und zwischen den Schichten V und VI mögen die Gründe gewesen sein, die diesen Forscher bestimmten, diese Gegend als der Area gigantopyramidalis entsprechend aufzufassen.

Weniger genau grenzen Hermanides und Köppen (20) die motorische Zone der Nagetiere ab. Sie nehmen an, daß sie sich in den mittleren und vorderen Partien der Konvexität findet und bis zum Stirnpol reicht, weil sie hier ebenso große Zellen finden wie weiter hinten. Wenn es nur auf die Größe der Zellen in Schicht V ankäme, würde mein Feld *a* am ehesten als motorisches Feld in Frage kommen, weil es ja die größten Zellen enthält. Allerdings entsprechen diese großen Zellen ebensowenig wie irgendeine Zelle in der Rinde der Maus den Anforderungen, welche Kolmer in einer Arbeit aus dem Nißlschen Laboratorium (23) an eine motorische Zelle stellt. Die gut entwickelte Schicht IV in unserem Felde *a* wäre nach Brodmanns Darlegungen ein Grund gegen die Auffassung als Area gigantopyramidalis, obschon Brodmann bei den Karnivoren einen körnerhaltigen Übergangstypus an den Grenzgebieten der Area gigantopyramidalis angenommen hat.

Watson (42) hat die motorische Zone bei einer anderen Ordnung, den Insektivoren, lokalisiert. Das Feld, welches dieser Autor bei der Spitzmaus für das motorische hält, hat sowohl in seiner Lage als in der Struktur seines Querschnittes (man vergleiche Fig. 1 von Watsons Arbeit mit meiner Fig. 12) eine so große Ähnlichkeit mit meinem Felde *a*, daß ich vermute, Watson würde diesem Feld bei der Hausmaus motorische Funktionen zusprechen.

Schließlich ist noch die Ansicht von Haller (18) zu beachten, der annimmt, daß eine motorische Zone im Sinne der höheren Mamalier bei der Maus noch nicht entwickelt ist, sondern daß sie sich in der Phylogenese erst später aus Hallers dorso-occipitalen Gebiet entwickelt.

Meines Erachtens ist gegenwärtig die Histologie allein nicht imstande, die Frage nach der Lage des motorischen Zentrums des Maus zu lösen. Das Experiment muß weiter helfen. Die Exstirpation[1] weder der motorischen Zone, wie sie Brodmann aus Analogie mit seiner Auffassung beim Kaninchen, bei der Maus lokalisieren müßte, noch des Feldes *a*, noch der ganzen ausgedehnten Region, welche Döllken für die motorische Funktion in Anspruch nimmt, hat mir irgendwelche wahrnehmbare Ausfallserscheinungen in der Motilität der Maus ergeben. Ob Reizversuche oder andere Experimente zum Ziele führen, muß die Zukunft lehren.

### Die optische Region.

Auch die Stelle des zentralen Sehens ist bei der Maus und anderen Nagern schon mit aller Bestimmtheit lokalisiert worden. Cajal hat 1892 für das Kaninchen, das Meerschweinchen und die Ratte die Rinde der Unterfläche des Hinterhauptslappens, welche meiner Formation *s* bei der Maus entspricht, als der Area striata des Menschen entsprechend beschrieben. Nicht nur die Lage, sondern auch die Anwesenheit eines nervösen, dem Baillager oder Gennarischen Streifen entsprechenden Nervenplexus veranlaßten ihn zu dieser Lokalisation. Später (29) ist dieser ausgezeichnete Forscher allerdings über die Lage dieses Zentrums bei den Lissencephalen wieder unsicher geworden.

Die gleiche Stelle (unsere Formation *s*) haben Hermanides und Köppen (20) bei den Nagern als Sehrinde bezeichnet. Für diese Autoren ist das Auftreten einer Körnerschicht — sie bezeichnen damit die unmittelbar unter Schicht II befindliche Lage von locker stehenden, kleinen Elementen — neben der Topographie das ausschlaggebende Moment. Daß sie die durch das Anliegen des Mittelhirns bedingte konvexe Krümmung dieser Stelle als ein wahrscheinliches Analogon der Fissura calcarina bezeichnen, habe ich schon erwähnt. An die gleiche Stelle verlegt auch Mott (26) die Sehrinde des Kaninchens.

Auch Watson (42) vermutet (allerdings bei Insektivoren) in einer unserer Area *s* an Lage und Struktur entsprechenden Formation, die Stelle des zentralen Sehens.

[1] Die Wegnahme von Rindenstücken geschah nach Edingers Vorschlag mit Formalin. Vgl. hierzu die Anmerkung auf S. 5.

Aus den schönen vergleichenden Untersuchungen von Brodmann geht unter anderem hervor, daß die Lage an der Unterfläche des Hinterhauptslappens kein Kriterium für die Lage des optischen Zentrums ist. Beim Kaninchen und Ziesel liegt nach diesem Forscher die Area striata auf der Konvexität am occipitalen Teile der Hemisphären, ungefähr in der Gegend, wo bei der Maus die Felder *c* und *d* liegen. Die Abgrenzung auch dieses Feldes muß selbst bei höheren Nagern schwierig sein, denn die Umrisse der Area striata des Ziesels werden von Brodmann 1909 (9) wesentlich anders angegeben als 1906 (6). Damals ließ er sie auf die Medianfläche übergreifen, während sie in der neueren Darstellung die Mantelkante nicht erreicht.

Ist nach Brodmanns Kriterien mein Feld *c* oder *d* der Area striata homolog? Die Hauptmerkmale der Area striata sind der Gennarische Streifen und die Verbreiterung oder gar Verdoppelung der Schicht IV. Ein Streifen markhaltiger Fasern, der in der Lage dem Gennarischen entsprechen könnte, besteht nicht in meinen Feldern *c* und *d* noch sonstwo in der Rinde der Maus. Wir finden aber in Feld *c* einen marklosen Plexus in der Höhe der IV. und im unteren Teil der III. Zellschicht. Dieser Plexus ist jedoch weiter vorn, besonders in Feld *b*, noch viel stärker ausgesprochen als hier.

Schicht IV ist in unserer Formation *c* leidlich[1] entwickelt, besser als in den anderen Formationen des Hinterhaupts, aber wieder viel weniger stark als in Feld *b*. Auf diese Hauptkriterien können wir also die Annahme einer optischen Funktion für Feld *c* nicht gründen. Es gibt aber nach Brodmann (6) noch andere Merkmale. Das sind: eine ungewöhnlich breite und zellreiche Schicht VI, die scharf von Schicht V abgegrenzt ist; Schmalheit der Rinde im allgemeinen; die durchschnittlich größere Zelldichtigkeit und die Kleinheit der Zellen in diesem Typus.

Schicht VI ist sowohl in Formation *c* wie *d* gut entwickelt, aber nicht besonders breit, weniger breit als in den benachbarten Formationen *a* und *b*.

[1] Bei der einzigen grauen Hausmaus, die ich untersuchen konnte, war die Schicht IV etwas breiter, zellreicher und schärfer begrenzt als bei den meisten weißen Mäusen. Wahrscheinlich ist das eine Zufälligkeit. Wenn sich aber ein solcher Unterschied konstant finden sollte, könnte die schlechtere Ausbildung dieser Schicht mit der Schwachsichtigkeit der albinotischen Mäuse in Zusammenhang gebracht und ein starkes anatomisches Argument für die optische Funktion dieses Feldes gefunden werden.

Gegen Schicht V ist sie scharf abgegrenzt, aber das ist sie auch in anderen Formationen.

In Formation *c* sowohl wie in *d* besteht durchschnittlich besonders große Zelldichtigkeit und Kleinheit der Zellen. Vielleicht würde Brodmann deshalb auch bei der Maus die optische Rinde in jene Gegend verlegen. Mir fehlt dazu die nötige Erfahrung und das Vertrauen in die Beweiskraft jener Kriterien.

Sollte bei der Hausmaus eine Sehrinde überhaupt nicht differenziert sein? Es ist auffallend, wie wenig die Mäuse — und zwar nicht nur die infolge ihres Albinismus schwachsichtigen Laboratoriumsmäuse, sondern auch die grauen Hausmäuse — optische Eindrücke verwerten. Sie unterschneiden sich dadurch sehr deutlich schon von der Ratte[1]. Jedenfalls scheint uns zur Zeit die Histologie die Frage nach der Lokalisation der optischen Funktion in der Rinde der Maus nicht allein lösen zu können.

---

Diesen Darlegungen möchte ich zufügen, daß Cajal sehr wohl daran tat, die Lokalisation in der Regio suboccipitalis wieder aufzugeben. Er hat aber — allerdings ohne es zu wissen — die Sehrinde der Maus doch als erster beschrieben. Aus Untersuchungen, die ich in letzter Zeit vorgenommen, geht hervor, daß die so eigenartig aufgebaute, ungemein fibrillenreiche Rindenstelle, die er am kaudalen Ende des Lobus pyriformis entdeckte, und von der er angiebt, daß es ihm trotz aller Bemühungen nicht gelungen sei, Beziehungen zu den Riechzentren festzustellen, direkt bei anderen Säugern in die Formation zu verfolgen ist, die an der Basis des

[1] Im Gegensatz zur Ratte fixiert die Hausmaus nicht, und sie läßt sich nur schwer durch rein optische Reize schrecken. Sie findet ihren Weg hauptsächlich mit Hilfe des Tastsinnes (speziell des Oralsinnes) und des Geruches, während optische Eindrücke bei der Wahl ihres Weges nur eine ganz untergeordnete Rolle spielen; auch dieses im Gegensatz zur Ratte. Ich muß es mir versagen, die vielfachen, zum Teil recht komplizierten Versuche, die ich zur Feststellung dieser Verhältnisse anstellte, hier zu beschreiben. Seit dem Abschluß meiner Untersuchungen hat K. T. Waugh (Journal of Neurology and Psychology, Vol. 20, Nr. 6, 1910) zum Teil ähnliche Versuche ausführlich beschrieben. Durch derartige Versuche in Verbindung mit Exstirpationen von Rindenstücken dürfte sich die Lage des optischen Zentrums bei der Maus (allerdings nur mit sehr erheblichem Zeitaufwand und bei nicht albinotischen Tieren) feststellen lassen.

Occipitallappens und dessen Medialseite gelegen, anatomisch typische Sehrinde ist. Diese Stelle am kaudalen Pole des Pyriformis ist bei Hyrax capensis bereits sehr vergrößert und von einem schönen Gennarischen Streifen durchzogen, sie liegt aber noch ganz in diesem Übergangsfelde von Paläencephalon zu Neencephalon. Dadurch, daß die Hyraxpräparate zur Zeit, als Dr. Isenschmid hier arbeitete, noch nicht richtig erkannt waren, ist es unterblieben, die, wie es schien, dem Paläencephalon, das nicht durchforscht wurde, angehörige Rindenstelle näher zu untersuchen. Edinger.

## Die Lokalisation weiterer Funktionen.

Da hier nur das Neencephalon behandelt wurde, sehe ich von einer Diskussion der Lokalisation der Riechfunktion und des mit dem Trigemimus zusammenhängenden »Oralsinnes« von Edinger, die in dem phylogenetisch älteren basalen Teilen, also dem Paläencephalon zu suchen ist, ab. Über die Lokalisation weiterer Funktionen ist nur wenig zu sagen. Cajal sprach einmal (30, S. 100) die Vermutung aus, die Hörrinde möchte sich bei der Maus auf der Konvexität lateral von der motorischen Rinde finden, also vielleicht in der Gegend unseres Feldes *e* oder *i*. Wir haben keine Anhaltspunkte für eine solche Vermutung.

Watson (42) bildet als Fig. 2 seiner Arbeit über die Insektivoren eine Struktur bei der Spitzmaus ab, welche auffallend mit unserer Area *b* übereinstimmt. Das betreffende Feld hat auch im wesentlichen dieselbe Lage wie unser Feld *b*, ist nur noch hinten etwas weiter ausgedehnt. Watson betrachtet dieses Feld wegen seiner gut ausgebildeten Körnerschicht, in der er ein Kriterium für sensible Funktion sieht, als »General Sensory Area«, und wir denken uns, daß jener Autor unserem Feld *b* auch bei den Rodentiern sensible Funktion zusprechen müßte. Schließlich erwähne ich, daß Döllken (11) vom Geschmackszentrum der Maus wie von etwas Bekanntem spricht, ohne zu sagen, wo es sich befindet, noch auf welche Kriterien sich seine Annahme gründet.

Alles in allem scheint mir, daß wir für die Hirnrinde von der Histologie allein nicht zu viele Aufschlüsse über physiologische Fragen verlangen dürfen. Ihre Hauptaufgabe ist, dem Physiologen präzise Fragen vorzulegen. Auch kann sie mehr oder weniger sichere Vermutungen aufstellen, deren Bestätigung aber in letzter Instanz immer der Physiologie

obliegt. Den Anspruch, Fragen nach der Lokalisation von Funktionen in der Hirnrinde vollständig zu lösen, darf die Histologie nur erheben, wenn die Physiologie bei einem verwandten Tiere den Sitz einer Funktion endgültig festgestellt hat. Genau übereinstimmender Bau spricht dann mit Sicherheit für gleiche Funktion.

Schlüsse aber, die sich bloß auf mehr oder weniger große Ähnlichkeit von Strukturen bei in der phylogenetischen Reihe weit voneinander entfernten Tieren stützen, bedürfen selbstverständlich dringend der Bestätigung durch das Experiment.

## Angeführte Schriften.

1. Bolton, J. S. The Histological Basis of Amentia and Dementia. Archives of Neurology Bd. 2, 1903.

Brodmann, K. Beiträge zur histologischen Lokalisation der Großhirnrinde.

2. I. Mitteilung. Die Regio Rolandica. Journal für Psychologie und Neurol. Bd. 2, 1903.

3. II. Mitteilung. Der Calcarinatypus, ebenda Bd. 2, 1903.

4. III. Mitteilung. Die Rindenfelder der niederen Affen, ebenda Bd. 4, 1905.

5. IV. Mitteilung. Der Riesenpyramidentypus und sein Verhalten zu den Furchen bei den Karnivoren, ebenda Bd. 6, 1905.

6. V. Mitteilung. Über den allgemeinen Bauplan des Cortex Pallii usw., ebenda Bd. 6, 1906.

7. VI. Mitteilung. Die Cortexgliederung des Menschen, ebenda Bd. 10, 1907.

8. VII. Mitteilung. Die cytoarchitektonische Cortexgliederung der Halbaffen, ebenda Bd. 12, 1908.

9. Derselbe. Vergleichende Lokalisationslehre der Großhirnrinde. Leipzig 1909.

10. Derselbe. Zur histologischen Lokalisation der Hirnrinde (die Insel). Neurolog. Zentralbl. 1903.

11. Döllken. Beiträge zur Entwicklung des Säugergehirns. Lage und Ausdehnung des Bewegungszentrums der Maus. Neurolog. Zentralbl. 1907.

12. Edinger, L. Vorlesungen über den Bau der nervösen Zentralorgane. Bd. I und II. 7. Aufl. Leipzig 1904 und 1908.

13. Ernst, P. Mißbildungen des Nervensystems. Morphologie der Mißbildungen des Menschen und der Tiere. Herausgeg. von E. Schwalbe, Jena 1909.

14. Flatau und Jacobsohn. Handbuch der Anatomie und vergleichenden Anatomie des Zentralnervensystems der Säugetiere. Bd. I. Berlin 1899.

15. Goldstein, K. Beiträge zur Entwicklungsgeschichte des etwa $3\frac{1}{2}$ monatlichen menschlichen Gehirns. Archiv für Anatomie und Physiologie, 1903.

16. Grönberg, G. Die Ontogenese eines niederen Säugergehirns nach Untersuchungen an Erinaceus europeus. Zoolog. Jahrbücher Bd. 15, 1901.

17. Haller, B. Vom Bau des Wirbeltiergehirns. III. Teil: Mus. Morpholog. Jahrbuch Bd. 28, 1900.

18. Derselbe. Die phyletische Entfaltung der Großhirnrinde. Archiv für mikroskopische Anatomie Bd. 71, 1908.

19. Derselbe. Zur Ontogenie der Großhirnrinde der Säugetiere. Anatomischer Anzeiger Bd. 37, 1910.

20. Hermanides, S. R., und Köppen, M. Über die Furchen und den Bau der Großhirnrinde bei den Lissencephalen usw. Archiv für Psychiatrie Bd. 37, 1903.

21. His, W. Die Entwicklung des menschlichen Gehirns während der ersten Monate. Leipzig 1904.

22. Kappers, A. C. U. Folia Neurobiologica. 1910, V, S. 154.

23. Kolmer, W. Beitrag zur Kenntnis der motorischen Hirnrindenregion. Archiv für mikroskop. Anatomie und Entwicklungsgeschichte. Bd. 57, 1900.

24. Marinesco, G., und Goldstein, M. Sur l'architecture de l'écorce temporale et son rapport avec l'audition. L'Encéphale, Mai 1910.

25. Mauß, Th. Die faserarchitektonische Gliederung der Großhirnrinde bei niederen Affen. Journal für Psychologie und Neurologie Bd. 13, 1908.

26. Mott, F. W. The progressive evolution of the Structure und Functions of the Visual Cortex in Mammalia. Archives of Neurology Bd. 3, 1907.

27. Paton, St. The Histogenesis of the cellular Elements of the cerebral Cortex. Johns Hopkins Hospital Reports, Vol. IX.

28. Raimón y Cajal. Sur la structure de l'écorce cérébrale de quelques mammifères. La Cellule, Bd. 7.

Derselbe. Studien über die Hirnrinde des Menschen:

29. 1. Heft. Die Sehrinde. Leipzig 1900.

30. 2. Heft. Die Bewegungsrinde. Leipzig 1900.

31. 3. Heft. Die Hörrinde. Leipzig 1902.

32. 5. Heft. Vergleichende Strukturbeschreibung und Histogenesis der Hirnrinde. Leipzig 1906.

33. Derselbe. Beiträge zur feineren Anatomie des großen Hirns. Über den Bau der Rinde des unteren Hinterhauptslappens der kleinen Säugetiere. Leipzig 1903.

34. Ranke, O. Beiträge zur Kenntnis der normalen und pathologischen Hirnrindenbildung. Zieglers Beiträge Bd. 47, 1909.

35. Retzius. Das Menschenhirn. Stockholm 1906.

36. Rondoni, P. Beiträge zum Studium der Entwicklungskrankheiten des Gehirns. Archiv für Psychiatrie Bd. 45, 1909.

37. Stefanowska, M. Evolution des Cellules nerveuses corticales chex la souris après la naissance. Annales de la Société Royale des Sciences méd. et naturelles de Bruxelles Bd. 7, 1898.

38. Tredgold, A. F. Amentia (Idiocy and Imbecillity) Archives of Neurology Bd. 2, 1903.

39. Vogt, H., und Rondoni, P. Zum Aufbau der Hirnrinde. Deutsche med. Wochenschrift 1908, S. 1886.

40. Vogt, H. Über die Anatomie, das Wesen und die Entstehung mikrocephaler Mißbildungen usw. Arbeiten aus dem hirnanatomischen Institut in Zürich. Herausgeg. von Monakow. Wiesbaden 1905.

41. Vogt, O. Zur anatomischen Gliederung des Cortex cerebri. Journal für Psychologie und Neurologie Bd. 2, 1903.

42. Watson, G. A. The Mammalian Cerebral Cortex with special reference to its Comparative Histology. I. Order Insectivora. Archives of Neurology Bd. III. London 1907.

43. Wilson. A critical Description of the Brain of a Degenerate (convict and murder). Proceedings of the Royal Society of Medicine, July 1909.

44. Ziehen, Th. Handbuch der Entwicklungslehre der Wirbeltiere. Herausgeg. von O. Hertwig. 2. Band, III. Teil. Jena 1906.

# Verzeichnis der Abbildungen.

## Tafeln.

Alle Rindenbilder, mit Ausnahme von Fig. 1, welche eine Prismenzeichnung darstellt, sind mittels des Edingerschen Zeichen- und Projektionsapparates gewonnene Photographien. Wenn kein Alter angegeben ist, betreffen die Bilder die Rinde der erwachsenen Maus. Die Schnittdicke betrug bei ausgewachsenen Gehirnen immer 10 $\mu$. Wo nicht anders angegeben, ist die Vergrößerung 1 zu etwa 90.

### Tafel I.

Fig. 1. Pallium eines Mäusefötus von 10,5 mm, 1:500. $R$ = Rinde, $Z$ = Zwischenschicht, $M$ = Matrix, $li$ = Membrana limitans interna. (Zu S. 9.)

Fig. 2. Pallium der neugeborenen Maus, 1:125, 5 $\mu$. (Zu S. 10.) Formatio *a*.

Fig. 3. Großhirnrinde, 3 Tage 6 Stunden, 1:125, 5 $\mu$. (Zu S. 14.) Formatio *a*.

Fig. 4. Rinde, 9 Tage 6 Stunden, 1:125, 5 $\mu$. (Zu S. 15.) Formatio *a*.

Fig. 5. Rinde, 12 Tage 6 Stunden, 1:125, 7 $\mu$. Formatio *a*.

Fig. 6. Formatio *b*. (Zu S. 23.)

### Tafel II.

Fig. 8. Formatio *b*, etwa 1:200. In das Photogramm eines mit Cresylviolett gefärbten Präparates sind links Zellen und Fasern nach Präparaten nach Golgi, Cajal und Bielschowsky eingezeichnet. (Zu S. 17—19 u. 23.)

### Tafel III.

Fig. 12. Formatio *a*. (Zu S. 22.)

Fig. 13. Formatio *c*. (Zu S. 23.)

Fig. 14. Formatio *d*. (Zu S. 24.)

Fig. 15. Formatio *f*. (Zu S. 25.)

Fig. 16. Formatio *i*. (Zu S. 26.)

Fig. 20. Formatio *m*. (Zu S. 29.)

### Tafel IV.

Fig. 17. Formatio *l* (in der Mitte der Figur), links Formatio *k*, rechts entlang der Fissura sagittalis Formatio *m*. Frontalschnitt. (Zu S. 27.)

Fig. 18. Formatio *q*. Frontalschnitt. (Zu S. 31.)

Tafel V.

Fig. 19. Formatio *k*. (Zu S. 26.)

Fig. 21. Formatio *r*. (Zu S. 31.) Der Schnitt hat die Rinde nicht genau senkrecht getroffen, so daß sie etwas zu breit erscheint.

Fig. 22. Formatio *s*. (Zu S. 33.)

Fig. 23. Formatio *t*. (Zu S. 34.)

## Textfiguren.

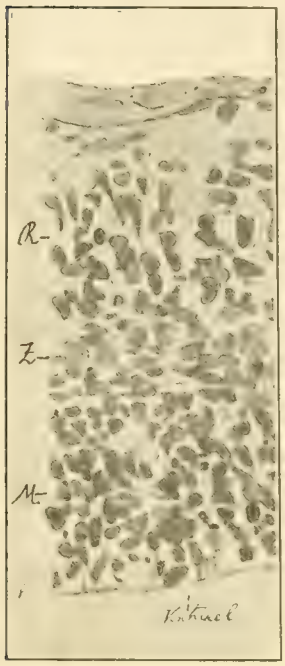
Fig. 7. Das Wachstum der Rinde schematisch dargestellt. Formatio *a*, 1:100. (S. 13.)

Fig. 9. Rechte Hemisphäre, Dorsalansicht, Felderung der Hirnrinde, Schema. (S. 21.)

Fig. 10. Rechte Hemisphäre, Lateralansicht, Schema. (S. 21.)

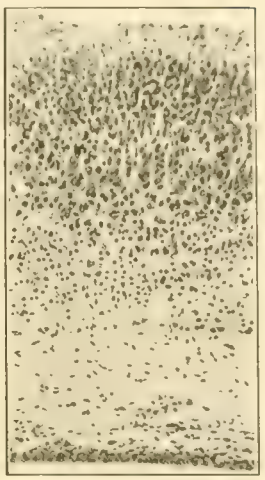
Fig. 11. Rechte Hemisphäre, Medialansicht, Schema. (S. 21.)

*Fig. 1.*



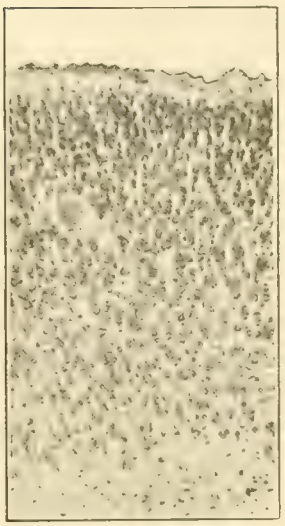

Hemisphärenwände des Mäusefötus von 10.5 mm Länge. Vergr. 1 : 500.

*Fig. 2.*



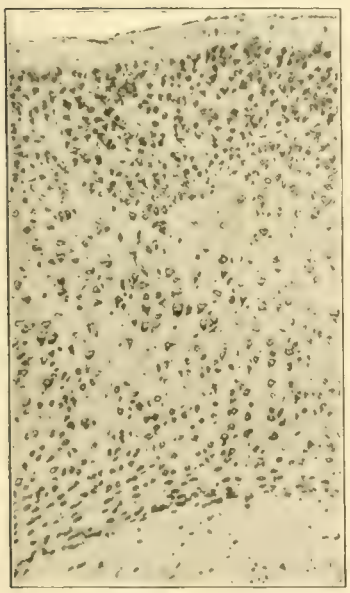
Hemisphärenwand der neugeborenen Maus (in der Gegend von Formatio *a*). 5 *u*. Vergr. 1 : 125.

*Fig. 3.*



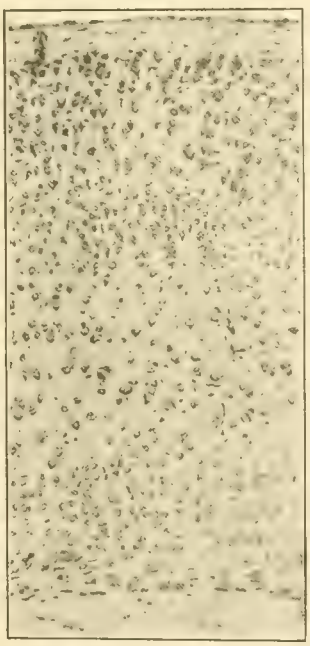
Rinde, 3 Tage 6 Std. Formatio *a*. 5 *u*. Vergr. 1 : 125.

*Fig. 4.*



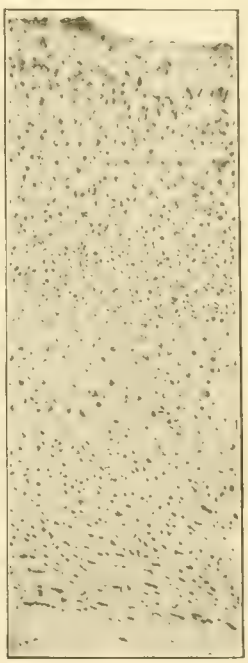
9 Tage 6 Std. Formatio *a*. 5 *u*. Vergr. 1 : 125.

*Fig. 5.*



12 Tage 6 Std. Formatio *a*. 7 *u*. Vergr. 1 : 125.

*Fig. 6.*

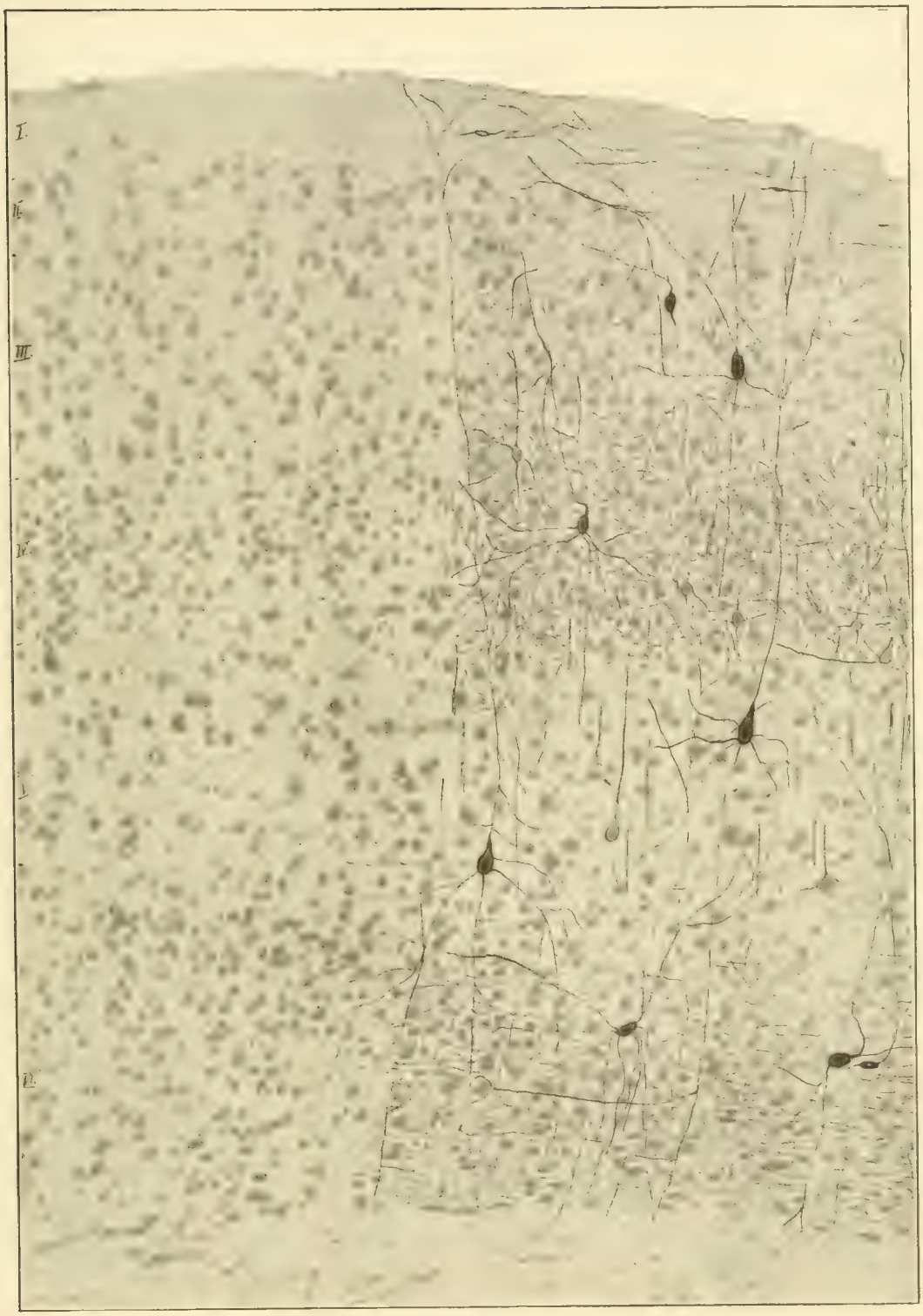


Formatio *b*, erwachsen. 10 *u*. Vergr. 1 : 90.

**R. Isenschmid: Zur Kenntnis der Großhirnrinde der Maus.**

**Taf. I.**

*Fig. 8.*

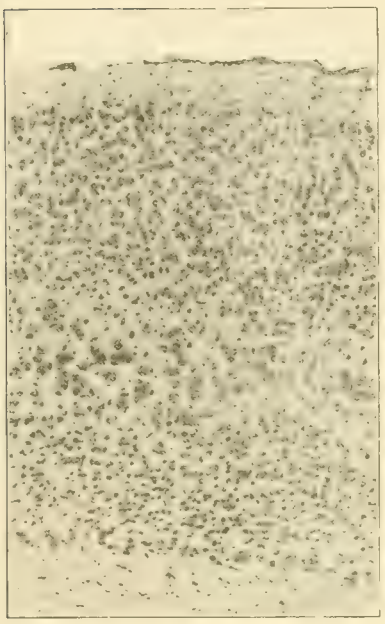



Formatio *b*.

R. Isenschmid: Zur Kenntnis der Großhirnrinde der Maus.

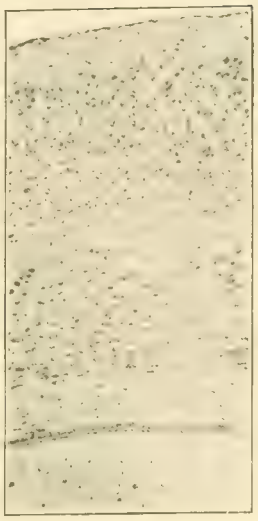
Taf. II.

*Fig. 12.*



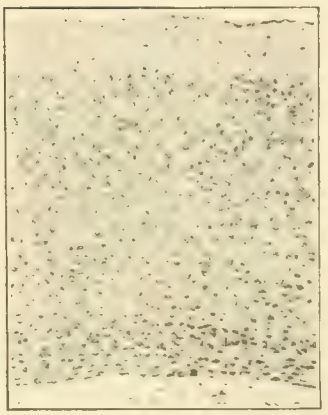
Formatio *a*. Vergr. 1:90.

*Fig. 13.*



Formatio *c*.

*Fig. 11.*

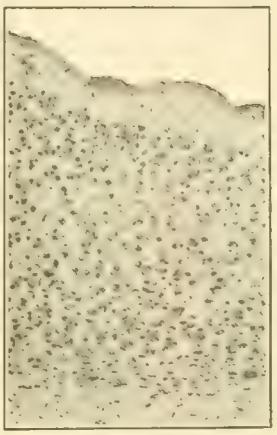


Formatio *d*.

*Fig. 15.*

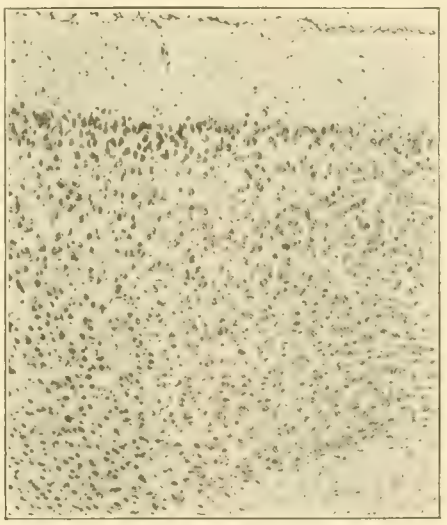
Formatio *f*.

*Fig. 16.*



Formatio *i*.

*Fig. 20.*

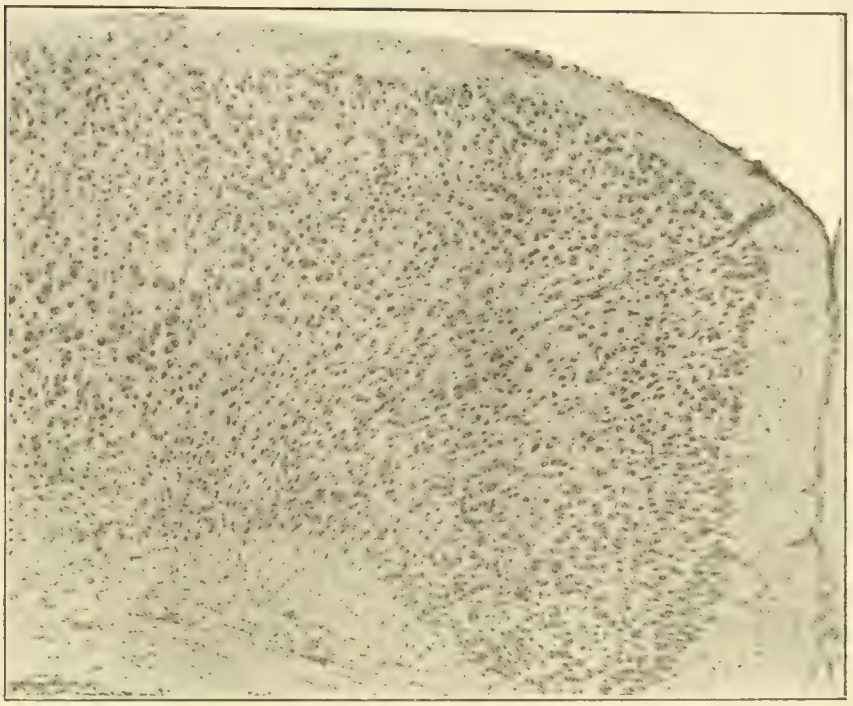


Formatio *m*.

R. Isenschmid: Zur Kenntnis der Großhirnrinde der Maus.

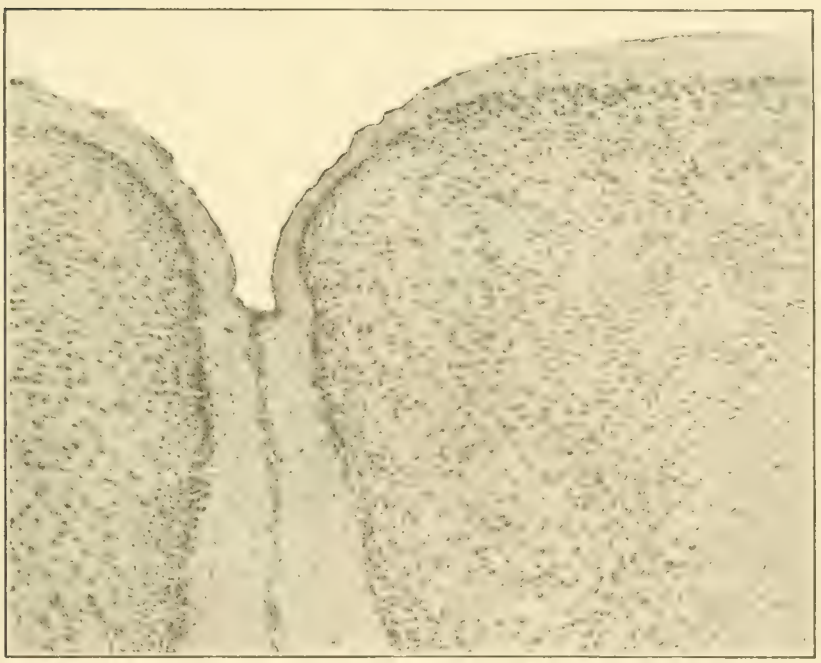
Taf. III.

*Fig. 17.*



Formatio *l*.

*Fig. 18.*

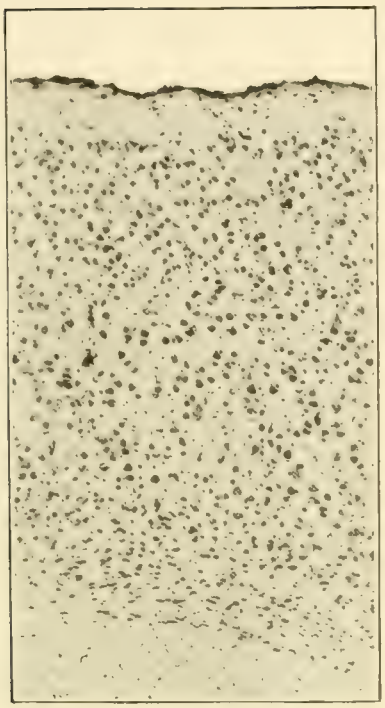


Formatio *q*.

R. Isenschmid: Zur Kenntnis der Großhirnrinde der Maus.

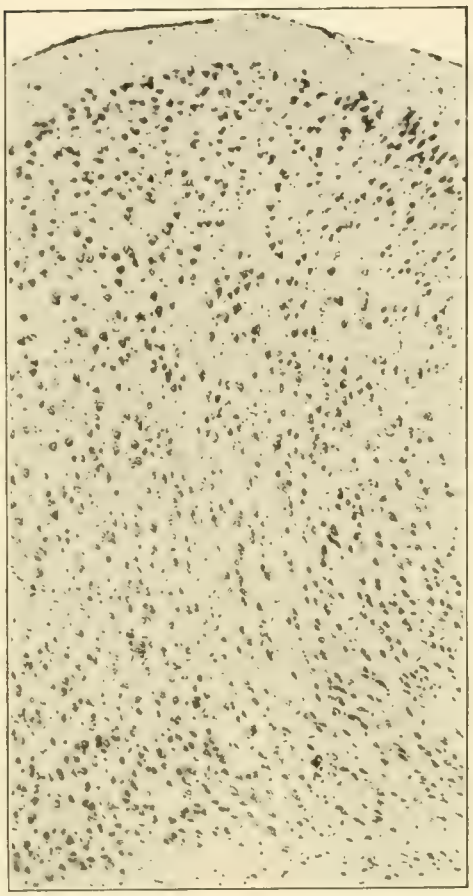
Taf. IV.

*Fig. 19.*



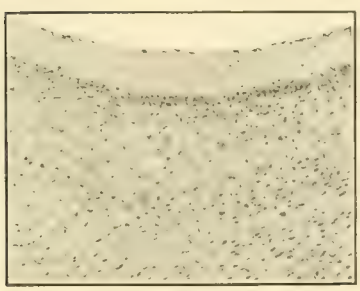
Formatio *k*.

*Fig. 21.*



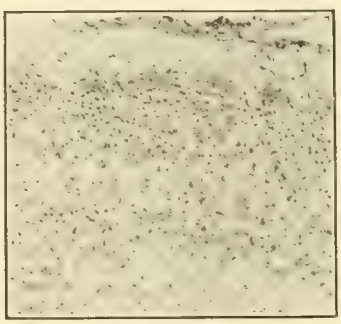
Formatio *r*.

*Fig. 22.*



Formatio *s*.

*Fig. 23.*



Formatio *t*.

R. Isenschmid: Zur Kenntnis der Großhirnrinde der Maus.

Taf. V.

# Zellanordnungen und Faserzüge im Vorderhirn von *Siren lacertina*.

Von

Dr. med. PAUL RÖTHIG.

Vorgelegt von Hrn. Waldeyer in der Gesamtsitzung am 23. März 1911.
Zum Druck eingereicht am gleichen Tage, ausgegeben am 22. Juni 1911.

## Material und Methode.

Von den *Phanerobranchiata* erhielt ich fünf lebende Exemplare der Gattung *Siren*, und zwar *Siren lacertina*. Dieses Material wurde zur Untersuchung des Zentralnervensystems in folgender Weise behandelt. Zwei Köpfe wurden in toto in Pikrinessigsäuresublimat fixiert und nach Entkalkung mit Trichloressigsäure in Frontalschnitte und Sagittalschnitte zerlegt und mit Hämatoxylin und Erythrosin gefärbt. Bei den drei anderen Exemplaren präparierte man das Gehirn heraus, fixierte es in Formalin und behandelte es nach der Weigertschen Markscheidenmethode. Es wurden hierbei Frontal-, Sagittal- und Horizontalschnittserien angefertigt.

Die vorliegende Arbeit gibt von diesem lebensfrisch eingelegten Material eine Darstellung der Zellanordnungen und Faserzüge im Telencephalon, und im frontalen Abschnitt des Diencephalon. Es zeigte sich, daß *Siren lacertina* besonders deshalb ein überaus günstiges Untersuchungsobjekt ist, weil sich bei diesem Tiere der Verlauf der Faserzüge mit fast schematischer Klarheit ergibt. Von diesen letzteren werden entsprechend der angewandten Methodik ausschließlich die markhaltigen Faserzüge berücksichtigt.

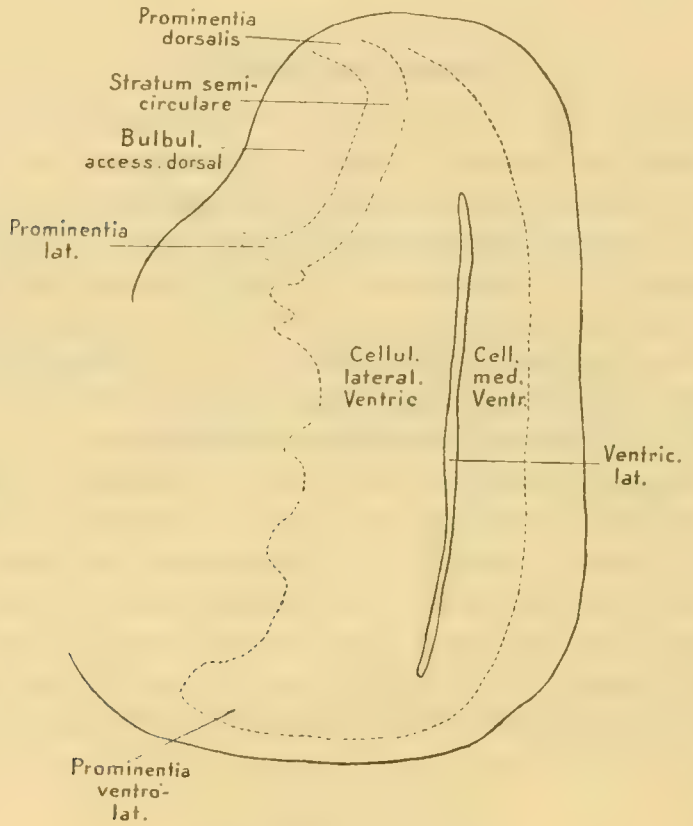
## Zellanordnungen.

### Formatio bulbaris.

Wie die Figuren 1—4 auf Taf. I zeigen, nimmt die Formatio bulbaris vorn den ganzen lateralen, mehr kaudal den lateroventralen Abschnitt des Bulbus olfactorius ein. Derselben lagert sich in den Querschnittsebenen hinter dem ersten Auftreten des Ventriculus bulbaris dorsal eine zweite Formatio-bulbaris-Bildung an, die einen Bulbulus accessorius dorsalis darstellt (Fig. 4 und 5 auf Taf. I und II und Textfig. 1); umschlossen wird dieser Bulbulus, wie besonders die erwähnte Textfigur zeigt, von charakteristischen Zellanordnungen, nämlich der Prominentia cell. dorsalis und

lateralis, sowie dem zwischen beiden liegenden halbkreisförmigen Stratum cell. semicirculare. Einzelheiten im zellularen Aufbau der Formatio bulbaris und des Bulbulus accessorius dorsalis ließen sich bei der angewandten Methodik nicht nachweisen.

*Fig. 1.*




Bulbus olfactorius.

Wie die Frontalserie durch den ganzen Kopf des Tieres zeigt, sind die Bulb. olf. in ihrem hinteren Bezirk für eine kurze Strecke an der Medianfläche durch eine Brücke verbunden, es gibt hier also eine Concrescentia bulbaris. (Anm. 1.)[1]

Was die Zellanordnungen betrifft, so bemerkt man ganz frontal (Fig. 1 und 2 Taf. I), daß die mediale Fläche des Bulbus von den Cellulae me-

[1] Siehe S. 15.

diales, die dorsale von den Cell. dorsales, die ventrale von den Cell. ventrales, ausgekleidet wird. Von diesen drei Zellgruppen, die das ganze Gebiet des Bulbusquerschnittes hufeisenförmig von median her umfassen, reichen die Cell. dorsales und ventrales bis an die Formatio bulbaris heran und schieben sich zum Teil in ihr Gebiet hinein vor (Fig. 2 Taf. I). Die Cell. mediales bilden am Rande der medialen Bulbusfläche eine dichte Lage, während sie sich nach lateralwärts in lockere Zellgruppen auflösen, so daß man danach noch zwei Unterabteilungen dieser Zellgruppen unterscheiden könnte; von einer Benennung derselben wird aber abgesehen.

Im Innern des Gebietes der Cell. bulbares mediales tritt weiter kaudal (Fig. 3 Taf. I) die Spitze des Ventriculus lateralis (bulbaris) auf. Danach lassen sich zwei neue Zellgruppen unterscheiden: Die Cell. mediales, die den Ventrikel an seiner medialen Fläche, und die Cell. laterales, die ihn an seiner lateralen Fläche begrenzen. Letztere stoßen lateralwärts an die vorher erwähnten lockeren Zellgruppen an. In der Querschnittsebene der Fig. 3 sieht man ventral noch die Cell. bulb. ventr., dorsal die Cell. bulb. dorsal.; letztere sind zu einer starken Anhäufung angeordnet, die ein Tuberculum bulbi dorso-laterale bildet. Unmittelbar hinter letzterem beginnt das Gebiet des vorher erwähnten Bulbulus accessorius dorsalis. Die ihn einscheidenden Zellansammlungen gehören, wie Textfig. 1 zeigt, den Cell. laterales ventric. an. Es sind die oben erwähnte Prominentia dorsal. und lat. sowie das Stratum semicirc.

Die erwähnten Cell. bulb. medial. und lat. gehen kaudalwärts über in die medialen und lateralen Ventrikelzellen (Fig. 4 Taf. I). Die Cell. lat. ventriculi bilden ventral einen Vorsprung nach lateralwärts, die Prominentia ventro-lateralis, ähnlich der dorsal am Bulbulus accessorius gelegenen Prominentia dorsalis (Fig. 6 Taf. II und Textfig. 1). Einen gleichen Zellvorsprung bemerkt man an der medio-ventralen Ventrikelecke, die Prominentia medialis (Fig. 6 und 7 Taf. II und III). Die Prominentia ventro-lateralis (Fig. 4—6 Taf. I und II) reicht bis in die Nähe des Hemisphärenrandes und hängt dort mit oberflächlich gelegenen Zellen, den Cell. superf. ventro-lat., zusammen. Wenige Schnitte weiter kaudal bildet sich aus diesen oberflächlich gelegenen Zellen in Zusammenhang mit den lateralen Ausläufern der lateralen Ventrikelzellen eine diffuse, den ganzen lateralen Hemisphärenteil einnehmende Zellmasse, wie Fig. 6 Taf. II) zeigt.

## Lobus hemisphaericus.

Aus dieser eben beschriebenen, auf Fig. 6 (Taf. II), den lateralen Hemisphärenabschnitt seitwärts von den lateralen Ventrikelzellen einnehmenden Zellmasse sondert sich weiter kaudal (Fig. 7 Taf. III) eine neue Zellmasse ab, die den ventro-lateralen Teil des Ventrikels umgibt, die Massa ventrolateralis. Sie ist durch einen zellenfreien Raum von den lateralen Ventrikelzellen (dorsalwärts) und einem Zellenvorsprung medialwärts geschieden. Infolgedessen kann man auf der Querschnittsebene der Fig. 7 an der lateralen Umgrenzung des Ventrikels nach einander folgende Zellgruppen unterscheiden: Die Cell. lat. ventric., die seitwärts einen Vorsprung, die Prominentia lat., bilden, die Massa ventro-lat. und schließlich die Prominentia medialis. Die Massa ventro-lat. geht kaudalwärts über in das Gebiet des Nucl. basalis (Fig. 8 Taf. III), so daß das Ursprungsgebiet des lateralen Vorderhirnbündels dorsal von der Prominentia lateralis, medial von der Prominentia medial. begrenzt wird. Die letztere, die Prominentia medialis, verbindet sich medianwärts mit dem gleichen Vorsprung der anderen Seite (Fig. 8 und 9 Taf. III und IV); sie weist dabei einen nach ventral gerichteten Sporn auf, die Prominentia ventralis (Fig. 7—9 Taf. III und IV), die das Areal des medialen und lateralen Vorderhirnbündels voneinander scheidet.

Die Prominentia cell. lat. reicht, wie die Abbildungen auf den beigegebenen Tafeln zeigen, in langer Linie weit kaudalwärts bis zur ventrolateralen Begrenzung des Ventrikels im hinteren Hemisphärenpol (Anm. 2).

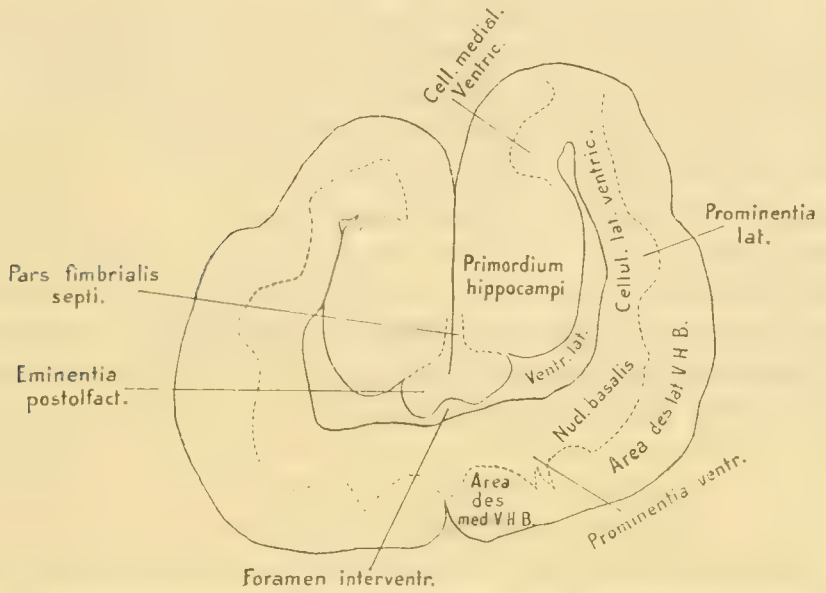
Im Gebiet der Cell. mediales ventriculi tritt in der Höhe des Querschnittes der Fig. 6 die erste Spur des Primordium hippocampi auf. Dasselbe erreicht seine höchste Ausbildung weiter kaudalwärts (Fig. 7—10 Taf. III und IV), um von da an wieder schwächer zu werden. (Anm. 3.)

Bei seinem ersten Auftreten (Fig. 6 Taf. II) grenzt es nach ventral hin an die Prominentia medialis. Neben derselben sieht man im Septumgebiet eine isolierte aus einigen Zellen bestehende Zellgruppe, die weiter rückwärts stärker wird und mehr in die Nähe der Incisura pallii rückt (Fig. 7 Taf. III); sie wird Nucleus medianus septi genannt. Zwischen ihr und der Prominentia medialis bemerkt man auf Fig. 7 eine zweite, aus ebensolchen Zellen bestehende Zellgruppe, die Nucleus lateralis septi heißen möge. Nach dorsalwärts hin grenzt an beide Gebilde das stark entwickelte Primordium hippocampi, lateralwärts von ihnen liegt, anfangs

eng verbunden mit der Prominentia medialis, der Anfang der Eminentia postolfactoria (Fig. 7 Taf. III). Letztere erreicht weiter kaudal eine größere Ausbildung, wie Fig. 8 und die Textfig. 2 zeigen.

Sie liegt unmittelbar hinter dem Areal des Nucleus medianus und lateralis septi. Auf dem Stadium ihrer höchsten Ausbildung (Fig. 8 Taf. III und Textfig. 2) setzen sich ihre Zellen nach oben hin scharf vom Primor-

*Fig. 2.*




dium hippocampi ab, wobei sich ein Teil derselben an der Incisura pallii in die Höhe schiebt und hierdurch das erste Auftreten der Pars fimbrialis septi (Kappers) darstellt. Die Eminentia postolfactoria begrenzt, wie die Textfig. 2 zeigt, das Foramen Monroi von dorsalwärts.

Wenn man unter Septum das Zellareal versteht, das in der Mittellinie vor dem Foramen Monroi zwischen den beiden Ventrikeln und zwischen den beiden dorsalen und ventralen medialen Hemisphärenteilen ausgebreitet ist, so wird bei unserem Materiale das Septum dargestellt durch die Eminentia postolfactoria. An sie schließen sich nach vorn hin an die beiden beschriebenen Septumkerne, der Nucleus medianus und lateralis septi (Fig. 6—7 Taf. II und III); einen dorsal gerichteten Fortsatz des Septumgebietes stellt die erwähnte Pars fimbrialis septi dar (Textfig. 2). (Anm. 4.)

Dorsalwärts grenzen an die Zellen des Primordium hippocampi die Cell. mediales ventriculi, die um den dorsalen Winkel des Seitenventrikels herum mit den Cell. lateralis ventriculi in Verbindung stehen. Je weiter kaudalwärts, einen desto geringeren Raum nehmen die Cell. mediales ventriculi ein.

Die Grenze zwischen dem Primordium hippocampi und der Eminentia postolfactoria wird an der medialen Ventrikelfläche durch eine scharfe Furche, die Fissura limitans hippocampi (C. J. Herrick) dargestellt. Sie bildet zugleich die Grenze zwischen der Pars medio-dorsalis und der Pars medio-ventralis der Hemisphäre. Danach muß man, falls man es nicht vorzieht, die Eminentia postolfactoria als eigentliches Septum als ein Gebiet für sich zu betrachten, die Eminentia postolfactoria zur Pars medio-ventralis der Hemisphäre rechnen (Fig. 8 Taf. III).

Auf der lateralen Ventrikelfläche liegt stellenweise eine schwach angedeutete Furche, die in das Gebiet der Prominentia lateralis einschneidet. Sie kann als Sulcus (Fissura) endorhinalis (Kappers, Turner) betrachtet werden und, bei Siren nur in schwacher Weise, die Grenze andeuten zwischen der Pars latero-dorsalis und der Pars latero-ventralis der Hemisphäre (Fig. 7 Taf. III). (Anm. 5.)

## Diencephalon.

In der Querschittsebene in Höhe der Commissura anterior tritt ganz ventral der Nucleus und Recessus praeopticus auf (Fig. 9 und 10 Taf. IV). Weiter kaudal verbindet sich der Nucleus praeopticus mit dem übrigen Zellbelag des Hypothalamus, und der Recessus praeopticus geht über in den Ventriculus diencephali (Fig. 11—14 Taf. V und VI).

Am Diencephalon unterscheiden wir, wie üblich, den Thalamus, den Epi- und Hypothalamus. Die Grenze zwischen Hypothalamus und Thalamus ist deutlich im Sulcus ventralis thalami (Fig. 11 und 12 Taf. V), eine Grenzfurche zwischen Epithalamus und Thalamus wurde dagegen nicht beobachtet. Im Thalamusgebiete liegt zwischen dem Sulcus ventralis und medialis das Gebiet der Herrick'schen Eminentia thalami (Fig. 11—13 Taf. V und VI). Im Epithalamus bemerkt man wie gewöhnlich die Ganglia habenulae (Fig. 11 bis 13 Taf. V und VI). Die Zellauskleidung am Ventriculus diencephali zeigt keine Abscheidung in verschiedene Gruppen. Stellenweise,

so Fig. 11—13, tritt eine Zellverbindung ein zwischen den Zellen der Prominentia lateralis des Lobus hemisphaericus und den Zellen des Diencephalon, eine Verbindung, die sich weiter.kaudalwärts wieder lockert (Fig. 14 Taf. VI).

## Markhaltige Faserzüge.

### Formatio bulbaris.

Aus dem Gebiete der Formatio bulbaris zieht, wie die Figuren 1 und 2 (Taf. I) zeigen, der Tractus olf. ventralis nach ventro-medianwärts, um an der medio-ventralen Ecke des Bulbus olf. in kaudale Richtung umzubiegen und nach kurzem Verlauf zu enden. Er reicht, wie die Sagittalschnittserie ergibt, bis in die Nähe des vorderen Ursprungsgebietes des lateralen Vorderhirnbündels.

### Bulbulus accessorius dorsalis.

Der Bulbulus accessorius dorsalis, dessen Areal im ersten Teil der Arbeit beschrieben worden ist und aus den Figuren 4 und 5 der Tafel I und II hervorgeht, sendet, wie die Figuren 5 und 6 der Tafel II zeigen, Fasern aus, die sich an die Faserzüge der Radix olfactoria lateralis anlegen, mit ihr die Cell. laterales ventriculi durchziehen und zu den Cell. superficiales ventro-laterales gelangen. Sie hängen nach kaudalwärts zusammen mit dem Fasergewirr, das, wie Fig. 6 Taf. II zeigt, die laterale Hemisphärenfläche einnimmt und seinerseits in Verbindung steht mit den Faserzügen aus der Radix olfactoria lat. und aus der Prominentia cell. ventro-lateralis. Da aus diesem Fasergewirr kaudalwärts sich die Faserzüge des vordersten Teiles des lateralen Vorderhirnbündels entwickeln, so steht unter Vermittlung dieses Fasergeflechtes der Bulbulus accessorius dorsalis mit dem lateralen Vorderhirnbündel in Verbindung, wenigstens läßt die anatomische Untersuchung der lückenlosen Schnittserie diese Annahme zu (vgl. hierzu die Figuren 5, 6 und 7 der Tafel II und III).

### Bulbus olfactorius.

Im vordersten Teil des Bulbus olfactorius ziehen zur dorso-medialen Ecke blau gefärbte feine Faserzüge, die eine Radix olfactoria dorsalis darstellen. Ganz das gleiche ist der Fall im medio-ventralen Gebiete des Bulbus olfactorius. Auch dorthin ziehen markhaltige Faserzüge, die an

der medio-ventralen Ecke kaudalwärts umbiegen. Sie bilden eine Radix olfactoria ventralis, die an der medio-ventralen Ecke des Bulbus auf den von seitwärts her aus der Formatio bulbaris kommenden Tractus olfactorius ventralis stößt und mit ihm kaudalwärts verläuft. Diese Verhältnisse ergeben sich klar aus den Figuren 1—4 der Tafel I.

Im Innern der Cell. bulbares mediales treten ganz vorn im Bulbus punktförmige Faserdurchschnitte auf (Fig. 2 Taf. I). Sie gehören, wie der weitere Verlauf der Serie ergibt, einer neuen Olfactoriuswurzel an, die, aus den medialen Bulbuszellen entspringend, dorsalwärts zieht und sich an der dorso-medialen Bulbusecke den Fasern der Radix olfactoria dorsalis anlegt und mit ihr nach hinten verläuft. Es ist dies die Radix olfactoria medialis. Sie ist dargestellt auf Fig. 2—5 der Taf. I und II. Wenn nach Auftreten des Ventriculus lateralis s. bulbaris sich die vorn einheitliche Masse der Cell. bulbares mediales in Cell. mediales und laterales ventriculi geschieden hat, entstehen aus den Cell. mediales ventriculi neue markhaltige Wurzelbündel der Radix olfactoria medialis, die in kaudalwärts hintereinandergelegenen Abständen aus ihrem zellulären Ursprungsgebiet nach medio-dorsalwärts ziehen.

Hierbei reichen Fasern — nach Befunden an der Horizontalschnittserie — aus der Radix olf. medial hinein in das vorderste Gebiet des dorsalen Abschnittes der medialen Hemisphärenfläche, so daß sie also eine Verbindung darstellen zwischen dem Bulb. olf. und dem dorso-frontalen Gebiet des Primordium hippocampi.

Die Radix olfactoria lateralis entsteht aus dem Gebiete der Cell. laterales ventriculi und zieht medio-dorsalwärts. Auch sie weist eine Anzahl kaudalwärts hintereinandergelegene Wurzelbündel auf, die ungleich kräftiger sind als die der Radix olfactoria medialis. Anordnung und Verlauf der Radix olfactoria lateralis wird deutlich auf den Zeichnungen Fig. 3—6 Taf. I und II.

Es strömen also in das Gebiet an der medio-dorsalen Ecke des Bulbus aus den verschiedenen Zellen desselben drei Faserzüge zusammen, nämlich die Radix olfactoria dorsalis ganz vorn, und mehr kaudal die Radix olfactoria medialis und lateralis. Von ihnen ist die letztere die mächtigste. Alle drei Wurzeln bilden an der medio-dorsalen Ecke des Bulbus den kaudalwärts ziehenden Tractus olfactorius dorsalis. Über letzteren vgl. die Figuren 4—7 der Tafel I—III. Entsprechend seines

nach hinten gerichteten Längsverlaufes erscheint dort das Areal des Tractus olfactorius doralis erfüllt mit punktförmigen Faserdurchschnitten. Der Tractus olfactorius dorsalis splittert, wie die Figur 7 auf Tafel III zeigt, in den dorso-lateralen Hemisphärenteilen auf, aus denen dann, wie die gleiche Figur darlegt, neue Faserzüge sich bilden, die nach ventral zum Areal des lateralen Vorderhirnbündels ziehen. Das System des Tractus olfactorius dorsalis mit seinen drei, vorn im Bulbus olfactorius gelegenen Wurzelbündeln und seiner Aufsplitterung hinten in der Pars dorso-lateralis des Lobus hemisphaericus kann angesehen werden als die Edingersche Radiatio bulbo-corticalis. Ein vom Tractus olfactorius dorsalis sich abzweigender, nach dem hinteren Pol der Hemisphäre ziehender Zug wurde nicht beobachtet.

Wir haben also zusammenfassend aus dem Bulbus olfactorius bzw. aus der Formatio bulbaris und dem Bulbulus accessorius dorsalis zum Lobus hemisphaericus folgende markhaltige Züge: Ventral den Tractus olfactorius ventralis und die Radix olfactoria ventralis, dorsal die Fasern aus dem Bulbulus accessorius unter Berührung mit der Radix olfactoria lateralis zum Ursprungsgebiet des lateralen Vorderhirnbündels und den Tractus olfactorius dorsalis mit seinen drei Ursprungswurzeln der Radix olfactoria dorsalis, medialis und lateralis. (Anm. 6.)

## Lobus hemisphaericus.

Wenn der vordere Teil des Ventriculus lateralis s. bulbaris sichtbar geworden ist (Fig. 3 Taf. I), bemerkt man medial von den Zügen der Radix olfactoria medialis hart an der Incisura pallii längsverlaufende Züge, die auf den weiter kaudal gelegenen Querschnittsebenen erheblich an Mächtigkeit zunehmen und ventro-medianwärts ziehen (Fig. 3—6 Taf. I und II). Sie biegen an der ventro-medianen Ecke in die kaudale Richtung um. Es ist das das System des Tractus olfactorius medialis. Wie erwähnt, gewinnt dasselbe in den fronto-kaudalen Querschnittsebenen an Ausdehnung, so daß nach seinem Umbiegen in die kaudale Richtung an der ventro-medianen Ecke der Hemisphäre ein kräftiger längsverlaufender Zug zustande kommt, der das mediale Vorderhirnbündel darstellt (Fig. 7 Taf. III). Ganz vorn reicht der Tractus olfactorius medialis bis in die Nähe des dorsalen Randes des Gehirnes (Fig. 4 Taf. I); während die Hauptmasse

seiner Fasern den eben beschriebenen ventro-medianen Verlauf nehmen, bleibt ein kleiner Teil dorsal liegen und verläuft in der Nähe des Tractus olfactorius dorsalis nach kaudal. Infolgedessen kann man das System des Tractus olfactorius medialis scheiden in eine Pars dorsalis und eine Pars ventralis, wie es auf den Figuren 4, 5 und 6 der Tafel I und II geschehen ist. Von diesen beiden Teilen ist die zum medialen Vorderhirnbündel ziehende Pars ventralis die bedeutendere.

Den Zügen des Tractus olfactorius medialis schließen sich nun aus den übrigen Teilen der medialen Hemisphärenfläche noch andere Faserzüge an und verlaufen mit ihm zum medialen Vorderhirnbündel. Es sind dies Faserzüge aus dem Primordium hippocampi und aus dem Nucleus medianus und lateralis septi (Fig. 7 Taf. III). Von letzteren Zügen bleibt es unsicher, ob sie in den Septumkernen entspringen oder Fasern des medialen Tractus olfactorius angehören, die diese Kerne nur durchziehen.

Die aus dem Primordium hippocampi zum Tractus olfactorius medialis und mit ihm zum medialen Vorderhirnbündel ziehenden Fasern entspringen in weiter Ausdehnung aus dem Primordium hippocampi, so daß die kaudaleren Teile desselben mit dem Tractus olfactorius medialis und dem medialen Vorderhirnbündel in Verbindung stehen (Fig. 7—9 Taf. III und IV).

Das mediale Vorderhirnbündel zieht im ventro-medianen Hemisphärengebiet, wie bekannt, kaudalwärts zum Hypothalamus und liegt dabei an der medialen Seite des lateralen Vorderhirnbündels, mit letzterem zusammen das basale Vorderhirnbündel darstellend. Vor und über dem Nucleus praeopticus (Fig. 9 und 10 Taf. IV) ziehen aus dem Gebiete des medialen Vorderhirnbündels Querzüge hinüber zur anderen Seite der Hemisphäre und bilden so eine Pars commissuralis des medialen Vorderhirnbündels. Vor der Commissura anterior und dorsalwärts von der eben erwähnten Pars commissuralis des medialen Vorderhirnbündels ziehen unter gegenseitiger Kreuzung aus dem Areal des medialen Vorderhirnbündels Faserzüge hinüber in den kaudalen Teil des Primordium hippocampi der gegenüberliegenden Seite (Fig. 10 Taf. IV). Sie durchsetzen bei diesem Verlaufe die Fasern der Commissura hippocampi und können angesehen werden als ein Tractus cortico-olfactorius medialis (Fig. 10 Taf. IV).

Das Faserareal des medialen Vorderhirnbündels umfaßt also folgende Faserzüge: Von vorn her aus der medialen Hemisphärenfläche den Tractus olfactorius medialis, Züge aus dem frontalen Teile des Primor-

dium hippocampi und aus den Nuclii septales, aus mehr kaudalen Ebenen des Primordiums hippocampi den Tractus cortico-olfactorius medialis; der letztere ist gekreuzt.

Das laterale Vorderhirnbündel und sein Ursprungsgebiet liegt bei Siren stark lateral (Fig. 7 und 8 Taf. III). Es erhält Fasern aus dem dorsolateralen Teil der Hemisphäre (Fig. 7 und 8 Taf. III) und vermutlich auch unter Vermittlung des Fasergewirrs der Figur 6 Tafel II aus dem Bulbulus accessorius dorsalis. Es gewinnt bei seinem kaudalwärts gerichteten Verlaufe das bekannte Aussehen des starken runden Bündels, an dem man hinter der Commissura anterior im frontalen Gebiete des Diencephalon zeitweilig eine Zerklüftung in zwei bis drei, mehr oder weniger deutlich voneinander geschiedene Bündel bemerken kann (Fig. 11—13 Taf. V und VI). Im Gebiete der Commissura anterior (Fig. 10 Taf. IV) bemerkt man die starke Pars commissuralis des lateralen Vorderhirnbündels.

Die Commissura hippocampi stellt eine aus marklosen und wenigen markhaltigen Fasern bestehende Verbindung der beiden Abschnitte des Primordium hippocampi dar (Fig. 10 Taf. IV); sie liegt hinter und wohl auch unter dem Foramen Monroi. Ihre markhaltigen, blau gefärbten Faserzüge haben verschiedene Bedeutung. Die einen stellen eine wirkliche markhaltige kommissurale Verbindung der hinteren Abschnitte des Primordium hippocampi dar (Fig. 10 und 11 Taf. IV und V), andere gehören den vorher erwähnten, die Commissura hippocampi durchziehenden Fasern des Tractus cortico-olfactorius medialis an; ferner sind in ihnen enthalten Züge, die vielleicht in ähnlicher Weise, wie der letztere Tractus, aus dem Gebiete des medialen Vorderhirnbündels stammen, unter Durchflechtung mit den Fasern der Commissura hippocampi zur medialen Ecke des Primordium hippocampi dicht oberhalb der Ansatzstelle der Commissura hippocampi, und von da nach hinten oben in die Habenularregion ziehen und so einen Tractus olfacto-habenularis medialis darstellen (Fig. 10 und 11 Taf. IV und V).

Die eben erwähnte, unmittelbar an der Ansatzstelle der Commissura hippocampi gelegene mediale Ecke des Primordium hippocampi (Fig. 10 Taf. IV) enthält eine Anzahl punktförmiger Faserquerschnitte, die, wie die Durchmusterung der Frontalschnittserie ergibt, nach vorn hin in der medialen Fläche des Primordium hippocampi aufsplittern (Fig. 9 Taf. IV) und nach hinten oben zum Gebiet der Eminentia thalami und von dort in die Habe-

nularregion ziehen (Fig. 11 Taf. V). Sie stellen demnach einen Tractus cortico-habenularis medialis dar.

Aus der latero-ventralen Zellmasse des hinteren Poles der Hemisphäre kommen, wie die Figuren 13 und 14 auf Tafel VI lehren, Faserzüge, die im Bogen um die ventro-mediale Ecke des hinteren Teiles des Ventriculus lateralis ziehen und nach vorn und dorsalwärts in die Habenularregion verlaufen. Es ist dies der Tractus cortico-habenularis lateralis.

In der Habenularregion hat einen ganz ähnlichen Verlauf, wie der letztere Zug, ein Tractus, der aus der Umgebung des lateralen Vorderhirnbündels herkommt und nach vorn und oben zieht. Es ist dies der Tractus olfacto-habenularis lateralis (Fig. 12—14 Taf. V und V).

Wir haben also als eine Verbindung der Habenularregion mit den medialen Teilen der Hemisphäre, d. h. mit dem Primordium hippocampi, den Tractus cortico-habenularis medialis, mit den lateralen Teilen der Hemisphäre den Tractus cortico-habenularis lateralis, als eine Verbindung der Habenularregion mit dem Gebiet des basalen Vorderhirnbündels vorn den Tractus olfacto-habenularis medialis (eine Verbindung speziell mit dem Gebiet des medialen Vorderhirnbündels), weiter kaudal den starken Tractus olfacto-habenularis lateralis (eine mächtige Verbindung speziell mit dem Gebiete des lateralen Vorderhirnbündels). (Anm. 7, 8, 9, 10.)

## Diencephalon.

Meine Arbeit umfaßt, wie eingangs erwähnt, nur den frontalen, unmittelbar an den Lobus hemisphaericus angrenzenden Abschnitt des Diencephalon. In diesem Gebiete gehören die letzthin erwähnten Faserzüge: der Tractus cortico-habenularis medialis, der Tractus olfacto-habenularis medialis und der Tractus olfacto-habenularis lateralis und cortico -habenularis lateralis sowohl dem Telencephalon wie dem Diencephalon an. Durch den Verlauf des Tractus cortico-habenularis medialis und des olfacto-habenularis medialis kommt im Gebiet der Eminentia thalami ein Fasergewirr zustande, das beiden Faserzügen angehört und mit dem noch untermischt sind Fasern aus der Commissura hippocampi posterior (Fig. 11 und 12 Taf. V). Hier sind also auf engem Raum Faserzüge verschiedener Bedeutung dicht beieinander gelagert. An dieser Stelle kreuzt ferner, wie die Figur 12 Tafel V zeigt, dieses Fasergewirr der Tractus olfacto-habenularis lateralis.

Auf Fig. 13 Taf. VI sieht man kräftige Faserzüge, die das laterale Vorderhirnbündel medio-dorsal bogenförmig umziehen. Sie entstehen, wie die gleiche Figur erweist, aus den Zellen am latero-ventralen Winkel des hinteren Teiles des Ventriculus lateralis und ziehen in dem erwähnten bogenförmigen Verlauf durch die Zellen des Diencephalon, um, wie Fig. 14 Taf. VI zeigt, lateral vom Recessus praeopticus nach hinten umzubiegen und zum Hypothalamus zu verlaufen. Sie stellen also vielleicht einen Tractus cortico-hypothalamicus dar.

Im Epithalamus sieht man auf Fig. 14 Taf. VI die Commissura habenularis, mit der wahrscheinlich der Tractus cortico-habenularis lateralis in Zusammenhang steht.

## Anmerkungen.

1. Concrescentia bulbaris. Mit Recht macht Kappers (1908, S. 202) darauf aufmerksam, daß die Concrescentia bulbaris im Gegensatz zur Kommissur der Schlußplatte, die in der primären Anlage begründet ist, eine sekundäre Verwachsungskommissur darstellt. Bei *Siren lacertina* fand ich nur einmal und nur auf eine kleine Strecke hin eine Concrescentia bulbaris.

2. Die Gesamtheit meiner Cellulae bulbares mediales nennt C. J. Herrick (1910, S. 421, Fig. 9/10) Nucleus olfactorius anterior; dieser stellt nach ihm die mediale Zellschicht am rostralen Ende des Ventriculus lateralis dar, die sich kaudal verliert in die dorsale und mediale Wand des Ventriculus lateralis.

Die Prominentia cellularis lateralis von *Siren lacertina* entspricht z. T. dem Snessarewschen »äußeren Zellenzug« beim Frosch. Dieser beginnt nach ihm am lateralen Teil seiner körnigen Umlagerung des Ventr. Lobi olf. und verläuft in den unteren Teilen der lateralen Wand des Lob. hemisph. neben dem Sulcus long. lat.; er endet in einer Protuberantia cell. lat., d. h. einem seitlichen Zellenvorsprung am Anfang des Hinterhornes (P. Snessarew 1908, S. 103).

Die Prominentia lateralis von *Siren lacertina* ist ferner gleich der Regio arcuata s. curva von Gaupp und P. Ramon (Gaupp 1899, S. 105 und Fig. 28).

Meine Cellulae medial. ventr. von *Siren lacertina* kann man gleichsetzen der Formatio pall. dors. von Gaupp, die Cellulae lat. ventr. der Formatio pall. lat. desselben Forschers (Gaupp 1899, S. 103, Fig. 28).

Die Prominentia medialis von *Siren lacertina* entspricht wahrscheinlich z. T. dem medialen Vorsprung der körnigen Umlagerung beim Frosch (P. Snessarew 1908, S. 103).

3. Primordium hippocampi (*Siren lacertina*) gleich Formatio pall. medial (Gaupp 1899, S. 104) und gleich Septum ou lame du fornix des Reptiles (P. Ramon S. 203).

4. C. J. Herrick (1910, S. 483) will den Ausdruck »Corpus praecommissuralis« reservieren für die ventrale Komponente des Corpus paraterminalis von Elliot Smith. Er rechnet dazu die in der Pars ventro-medialis liegenden Zellgebilde, so seinen Nucl. median. septi und die Pars fimbrialis septi (Kappers). Folgt man ihm, so würde bei *Siren lacertina* das Corpus praecommissuralis zerfallen in den Nucleus medianus und Nucleus lateralis septi, die Pars fimbrialis septi und das Zellenareal der Eminentia postolfactoria. Dabei ist folgendes zu beachten: Nach der Fig. 11 von C. J. Herrick von Amblystoma ist das, was Herrick »Eminentia postolfactoria« nennt, meine »Prominentia medialis« und (nach der Fig. 13) sein Nucleus medianus septi gleich der Eminentia postolfactoria von mir. Die dorsale Componente des Elliot Smithschen Corpus paraterminalis wird nach C. J. Herrick (1910, S. 483) dargestellt durch das Primordium hippocampi. Beide Teile des Corpus paraterminalis sind scharf voneinander geschieden, was auch für *Siren lacertina* zutrifft. Vgl. die scharfe dorsale Begrenzung der Eminentia postolfactoria und die Fissura limitans hippocampi der Fig. 8 auf Tafel III. C. J. Herrick erwähnt Verbindungen des Primordium hippocampi mit dem Corpus praecommissuralis oder seinem Nucl. median. septi; auch für *Siren* ist eine solche Verbindung mit dem Nucl. median. und lat. septi in dem beide Kerne von oben her durchziehenden Fasergewirr wahrscheinlich (Fig. 7, Taf. III). Er sieht im Corpus praecommissuralis eine Zwischenschaltung zwischen dem Hippocampus und Hypothalamus (S. 485), eine Annahme, die für den Nucl. median. und lat. septi von *Siren* ebenfalls Geltung hat, da aus dem Primordium hippocampi und beiden Kernen sich Faserzüge dem Tractus olf. medial. anlegen (Fig. 7, Taf. III).

Meine Eminentia postolfactoria ist ein Teil von dem, was Kappers (1908, S. 203) Area praecommissuralis genannt hat.

Die Eminentia postolfactoria (Gaupp) entspricht dem Petit lobule postolfactif von P. Ramon (1896, Fig. II, III, S. 233, 235).

In der subpallialen Hälfte der medialen Hemisphärenwand (des Septum s. str.) (der Pars ventro-medialis der neueren Nomenklatur) unterscheidet Gaupp (1899, S. 108/109) zwei Territorien grauer Substanz: das zentrale Grau des Septum, das lateral dem Ventrikelependym benachbart ist, und das medial bis an die mediale Oberfläche der Hemisphäre heranreichende Ganglion mediale septi. Will man einen Vergleich mit *Siren lacertina* führen, so könnte man das zentrale Septumgrau in der Prominentia medialis wiederfinden und in dem Nucl. median. und lat. septi Teile des Ganglion septi sehen.

5. Die Fissura limitans hippocampi (C. J. Herrick 1910, S. 416) ist gleich dem Sulcus intermedius (Gaupp) und gleich der Fissura septo-corticalis (Kappers). Eine Fissura arcuata (Gaupp) kam bei *Siren* nicht zur Beobachtung. Die Fissura limitans hippocampi entspricht ferner dem Sulcus long. medial. ventric. lat. von P. Snessarew (1908, Fig. 1 srhm).

Der Sulcus (die Fissura) endorhinalis (Kappers, Turner) ist gleich dem Sulcus limitans lat. (Gaupp) und ein Analogon des Sulcus long. lat. ventric. lat. von P. Snessarew (1908, Fig. 1 srhl).

6. Tract. olf. ventro-lat., Tract. olf. dorso-lat., Tract. olf. medial., Tract. olf. lat., Radix olf. lat., Radix olf. medial., Tract. bulbocorticalis, Fasciculus cortico-medialis der Autoren.

C. J. Herrick (1910, S. 422) beschreibt bei Amblystoma einen Tractus olf. ventro-lat., er entspringt am kaudalen Ende des Bulb. olf., zieht kaudalwärts und endet in einer Zellverdickung »am kaudalen Ende der Pars ventro-lat. gegenüber der Comm. ant., welche

dem sogenannten Corpus striatum beim Frosch entspricht«. Ähnlich verläuft bei *Siren lacertina* mein Tractus olf. ventralis. Beim Frosch beschreibt C. J. Herrick in seiner schematischen Fig. 41 einen Tractus olf. ventro-lat. aus dem Bulbulus accessorius zum Striatumgebiet. Auch bei *Siren lacertina* gibt es einen Bulbulus accessorius, der aber dorsal gelegen ist und deshalb »dorsalis« genannt wurde. Von ihm ziehen Fasern unter Anlegung an die Radix olf. lat. zum Anfangsteil des lateralen Vorderhirnbündels. Also auch hier eine Verbindung des Bulbulus access. mit dem Striatumgebiet.

Tractus olf. dorso-lat. von C. J. Herrick bei Amblystoma (1910, S. 422, Fig. 9 und 10) gleich einem Teil meiner Radices olf. dors. und lat. und meines Tractus olf. dors. von *Siren lacertina.*

Tractus olf. medial. von Amblystoma von C. J. Herrick (1910, S. 421 und 422), vielleicht gleich Teilen meiner Radices olf. ventral. und medial. bei *Siren lacertina.* Ferner gleich meinem Tractus olf. medial. und Teilen des medialen Vorderhirnbündels von *Siren lacertina* (Fig. 1, 10 und 11 bei C. J. Herrick).

P. Snessarew (1908) unterscheidet u. a. eine Radix olf. lat. und eine Radix olf. medial. Die erstere zerfällt nach ihm in drei Teile: eine Radix olf. lat. im Gebiete des Lobus olf., eine solche auf den Seitenflächen des Lobus hemisph. und in eine Radix olf. lat. in den ventralen Teilen des Lobus hemisph. Von letzterem zieht sie mit Teilen der Radix olf. medial. in die Snessarewsche Comm. suprem.; letztere entspricht meiner Comm. hab., und es ist der zu ihr verlaufende Abschnitt der Radix olf. lat. und medial. oder der Tractus communis von Snessarew gleich meinem Tractus cortico-hab. lat. Die erwähnten verschiedenen Teile der Radix olf. lat. beim Frosch (Snessarew) finden sich bei *Siren lacertina* wieder in den kaudalwärts aufeinander folgenden Wurzelbündeln derselben, aus denen wie beim Frosch ein Tractus olf. (dors.) hervorgeht. An der Bildung des Tractus olf. nimmt nach Snessarew auch die Radix olf. medial. teil; etwas Ähnliches ist auch bei *Siren lacertina* der Fall.

Kappers (1908, S. 203 ff.) unterscheidet unter den Tract. olf. einen Tractus olf. lat. und medial. Der Tractus olf. lat. entspricht bei *Siren* z. T. dem Tractus olf. dors., vielleicht auch einem Teil der Radix olf. lat. und dors. Aber eine Fortsetzung des Tractus olf. dors. zum Okzipitalpol der Hemisphäre, wie es bei Rana der Fall ist, wurde bei *Siren lacertina* nicht beobachtet. Der Tractus olf. medial. (von Kappers) entspricht vielleicht meiner Radix olf. ventr. und einem Teil meiner Radix olf. medial. Er endet nach Kappers (1908, S. 204) größtenteils in der basi-medialen Fortsetzung des Lobus olf. ant. und namentlich in der Area praecomm. des Septum. Das könnte zutreffen für die Radix olf. ventr. von *Siren lacertina.* Nach Kappers ist aber beim Frosch auch eine Endigung eines Teiles von ihm im unteren Teil des Primordium hipp. als sicher zu betrachten.

Der Tractus bulbo-cortic. von Ramon und von Gaupp (1899, S. 113) ist wahrscheinlich beim Frosch gleich einem Teil der Radix olf. lat. und des Tractus olf. dors. von *Siren lacertina.*

Der P. Ramonsche Fasciculus cortico-medial. (P. Ramon 1896, S. 246 und Fig. X) entspricht bei *Siren lacertina* meinem Tractus olf. medial. und vielleicht auch Teilen der Radix olf. medial.

7. Mediales Vorderhirnbündel, laterales Vorderhirnbündel, Pars frontalis und Pars inferior comm. ant., Fasciculus arcuatus inf., Praecommissura der Autoren.

Mediales und laterales Vorderhirnbündel. C. J. Herrick (1910, S. 418) gibt an, daß beide teilweise in der Comm. ant. kreuzen. So auch bei *Siren lacertina*: Pars commissuralis des lateralen und medialen Vorderhirnbündels (Fig. 9 und 10 auf Taf. IV). Der Teil des lateralen Vorderhirnbündels, der im ventralen Abschnitt des Thalamus endigt, ist nach C. J. Herrick (S. 433) der Tractus strio-thalam.; an ihn schließen sich kaudal an der Tractus thalamo-bulb. et spinal. und vom Hypothalamus her der Tractus mamillo-bulb. Aufsteigende Teile sind im lateralen Vorderhirnbündel nach dem gleichen Forscher: Züge aus dem Colliculus inf., aus der Pars dors. thalam., aus dem Corpus genic. lat. (S. 444). Der beschriebene Gehirnabschnitt von *Siren lacertina* gibt auf diese Fragen keine präzise Antwort; er zeigt nur in der Zerklüftung des lateralen Vorderhirnbündels an, daß in diesem Bündel wohl sicher verschiedenwertige Züge vorhanden sind. Das mediale Vorderhirnbündel stellt hauptsächlich eine Verbindung mit dem Hypothalamus dar, ist gleich dem Tractus olf. hypothal. der Fische (S. 418, 430). Auch Kappers (1908, S. 206/207) sieht im basalen Vorderhirnbündel ab- und aufsteigende Bahnen: den Tractus olf. hypothal. und Tractus striothal., ferner den Tractus hypothalamo-olf.

Die Pars commiss. des medialen Vorderhirnbündels von *Siren lacertina* ist das, was Kappers (1908, S. 205) bei Rana Pars frontalis comm. genannt hat. Sie enthält dort nach ihm Fasern, »welche gekreuzt aus der Area praecomm. des Septum kommen und sich nach der Kreuzung an der medialen Seite des basalen Vorderhirnbündels anlegen«. Da auch bei *Siren lacertina* der Tract. olf. medial. und das mediale Vorderhirnbündel die Area praecommiss. durchzieht, steht nichts im Wege, sich auch hier den Verlauf solcher Fasern zu konstruieren. Die Pars. commiss. des lateralen Vorderhirnbündels bei *Siren lacertina* entspricht der hinteren Abteilung der Comm. ant. oder dem Fasciculus arcuatus inf. von Kappers und von Ramon.

Das mediale Vorderhirnbündel von Gaupp, das gleich ist dem bei *Siren lacertina*, enthält den Fasciculus cortico-medial. und Fasciculus olf. commiss. (P. Ramon); ein Teil seiner Fasern kreuzt in der Lamina terminalis dicht über dem Recessus praeopticus in der Pars. inf. comm. ant. (Gaupp 1899, S. 91/92). Letztere entspricht meiner Pars. commiss. des medialen Vorderhirnbündels bei *Siren lacertina*.

Die Pars commiss. des lateralen Vorderhirnbündels von *Siren lacertina* ist gleich der Pars superior comm. ant. von Gaupp beim Frosch (1899, S. 116).

Die »Praecommissura« von Snessarew, die der Commissura anterior entspricht, wird von ihm zerlegt in eine Pars frontalis, medialis und caudalis. Die Pars medialis steht in naher Beziehung zum äußeren basalen Bündel des Vorderhirns, ist also wohl gleich der Pars commissuralis des lateralen Vorderhirnbündels bei *Siren lacertina*.

C. J. Herrick (1910), S. 430) gibt an, daß Fasern des lateralen Vorderhirnbündels »also reach the posterior pole« (d. h. der Hemisphäre). Dies trifft für *Siren lacertina* nicht zu.

Auf Fig. 14, Taf. VI wird das basale Vorderhirnbündel von *Siren* begleitet von einzelnen Zellen. Solche Zellen in der Umgebung des basalen Vorderhirnbündels hat auch Gaupp (1899, S. 85) beim Frosch gesehen. Es sind nach ihm vordere Ausläufer seines Nucl. ventral. thalami.

8. C. J. Herrick (1910, S. 480/481) zerlegt bei den Amphibien die Commissura hippocampi in zwei Teile: a) Comm. pallii ant. und b) Comm. pallii post. Auch für *Siren lacertina* trifft dies zu. Dort ist die Comm. hipp. (pallii) ant. marklos, die Comm. hipp. (pallii) post. markhaltig (Fig. 10—12, Taf. IV und V). Der vordere Teil verläuft von vorn nach

hinten und unter dem Foramen interventr. zur Kreuzung in der Lamina terminalis. Die Comm. pallii post. soll nach C. J. Herrick (S. 480) nach rückwärts verlaufen und unter Vermittlung seiner Stria medullaris in der Commissura superior kreuzen. Nach den Verhältnissen bei *Siren lacertina* bin ich geneigt, in der Comm. hipp. post. lediglich eine kommissurale Verbindung der kaudalen Primordium-hippocampi-Abschnitte zu erblicken. Vgl. z. B. Fig. 12, Taf. V. Dort sieht man lateral am Tractus olf. hab. lat. die kaudalen Ausläufer der Commissura hipp. post. Nicht auszuschließen ist allerdings die Möglichkeit, daß sich von ihr Fasern dem Tractus cortico-hab. lat. anschließen; nur wenn man dies annimmt, kommt man mit C. J. Herrick zu seinem System der Comm. pallii post. Denn die Beschreibung, die er auf S. 427 und 447 von seiner Comm. pallii post. gibt, trifft durchaus auf den Tractus cortico-hab. lat. zu.

9. Tractus olf. hab. medial., Tractus olf. hab. lat., Tractus cortico-olf. medial., Tractus area-hab., Tractus habenulo-striaticus der Autoren.

Nach C. J. Herrick (1910, S. 432) entspringt bei Amblystoma und beim Frosch der Tractus olf. hab. medial. von der Pars magnocellularis, der Tractus olf. hab. lat. von der Pars ant. des Nucleus praeopticus. Bei *Siren lacertina* kommt aus der Nähe des vorderen Teiles des Nucleus praeopticus allerdings ein dorsalwärts verlaufender Zug, der Tractus cortico-olf. medial. Es läßt sich für ihn aber der Nachweis eines Ursprungs in den Zellen des Nucleus praeopticus nicht führen. Auch scheint er mir bei *Siren* eine Verbindung mit dem hinteren Teile des Primordium hipp. darzustellen (Fig. 9 und 10, Taf. IV). Es ist aber, wie im Text erwähnt, wahrscheinlich, daß mit ihm zusammen ein Zug verläuft, der Tractus olf. hab. medial., der zur Habenularregion zieht und somit zum Teil dem Herrickschen Tractus olf. hab. medial. vergleichbar ist. Mein Tractus olf. hab. lat. steht bei *Siren* in keiner Beziehung zum Nucleus praeopticus; er nimmt seinen Ursprung aus dem Gebiet des lateralen Vorderhirnbündels (Fig. 12 und 13, Taf. V und VI).

Der Tractus cortico-hab. lat. ist gleich einem Teil der Taenia; ihr anderer Anteil wird dargestellt durch den Tractus olf. hab. (Edinger, Vorlesungen 1908 S. 213, Fig. 189).

Der Tractus olf. hab. von Kappers bei Rana (1908, S. 207 und 208) entspricht meinem Tractus olf. hab. lat. von *Siren lacertina*. Wie im Text erwähnt, kommt er her aus dem Gebiet des lateralen Vorderhirnbündels. Da dieses als ein Ursprungsgebiet auch die laterale Hemisphärenwand hat, so läßt sich auch für *Siren lacertina* ein ähnlicher Verlauf des Tractus olf. hab. (lat.) konstruieren, wie ihn Kappers angegeben hat: von der Außenwand der Hemisphäre (durch das laterale Vorderhirnbündel) nach dorsal aufwärts zur Habenularregion.

In dem von mir bei *Siren lacertina* erwähnten Tractus olf. hab. medial. kann man bei folgender Überlegung ein Analogon für den von Kappers (1908, S. 207 und 208) beschriebenen Tractus area-habenularis sehen. Dieser Zug, den Kappers auch bei Proteus, also einem meinem Untersuchungsobjekt nahestehenden Tier, sah, verläuft zunächst mit den Fasern des medialen Vorderhirnbündels, um dann fast senkrecht in die Ganglia hab. aufzusteigen. Auch bei *Siren lacertina* durchzieht der Tractus olf. medial. und das mediale Vorderhirnbündel die Area praecomm., auch hier kommt vom medialen Vorderhirnbündel der Tractus olf hab. medial. her, um (vielleicht gekreuzt) hinauf zum Habenulargebiet zu verlaufen.

Tractus cortico-hab. lat. Einen gleichen Zug, aber markloser Fasern beschreibt Gaupp (1899, S. 92) beim Frosch und vergleicht ihn mit dem Faisceau cortico-hab.

von P. Ramon. Er nimmt an, daß er bis in den Lobus olf. gelangt. Ebenso auch P. Snessarew. Das gleiche ist nach meinen noch nicht publizierten Untersuchungen bei Bufo der Fall. Bei *Siren lacertina* ließ sich das vordere Ende des Tractus cortico-hab. lat. nicht bestimmen.

Das von C. J. Herrick (1910, S. 444, Fig. 41; 16, 17) beschriebene System eines Tractus habenulo-striaticus, eine Verbindung zwischen Striatumgebiet und Habenularregion kann auf dem Wege laterales Vorderhirnbündel + Tractus olf. hab. lat. bei *Siren* erfolgen.

10. Columna fornicis, Fornix, Fornix longus, Tractus cortico-hab. medial. der Autoren.

Columna fornicis (C. J. Herrick). Darunter versteht er (1910, S. 423 und 480) Markfasern, welche aus dem Primordium hipp. ventral zum medialen Vorderhirnbündel verlaufen und mit ihm in den Hypothalamus ziehen. Sie sind bei Amblystoma begleitet von marklosen Fasern; doch läßt es Herrick offen, ob diese Fasern, die sich zwischen Primordium hipp. und Pars ventro-medial. ausbreiten, bis in den Hypothalamus gelangen. Bei *Siren lacertina* ist die Columna fornicis enthalten im Tractus olf. medialis. Hier gesellen sich zu dem Tractus olf. medial. noch markhaltige Züge aus dem Primordium hipp. in ähnlicher Weise, wie beim Herrickschen Objekt die marklosen Fasern (Fig. 7, Taf. III).

Der von Kappers (1908, S. 208) angegebene Verlauf des Fornix läßt sich bei *Siren lacertina* im Tractus cortico-olf. medial. auffinden, da nach ihm bei Rana ein Fasersystem aus der medialen Hippocampusrinde oberhalb der Pars frontalis comm. ant., das sich nach hinten dem medialen Basalbündel anschließt, die erste Anlage des Fornix bildet.

Einen Tractus cortico-hab. medial. beschreibt beim Frosch auch Gaupp (1899, S. 115), wie vor ihm schon P. Ramon. Nach ihm zieht ein Teil seiner Fasern dorsal vom basalen Vorderhirnbündel kaudalwärts, während ein anderer zur Habenularregion aufsteigt. P. Ramon sah in ihm den Fornix longus (Gaupp 1899, S. 115). Vielleicht stellen die bei *Siren lacertina* auf Fig. 13, Taf. VI medial vom Tractus olf. hab. lat. liegenden Faserdurchschnitte Teile des kaudalwärts ziehenden Abschnittes des Tractus cortico-hab. medial. dar.

Der Tractus cortico-hab. medial. entspricht dem Tractus ganglii hab. ad. Prosencephalon von Edinger (1892).

## Verzeichnis der im Text erwähnten Arbeiten.

1910. Herrick, C. Judson. The Morphology of the Forebrain in Amphibia and Reptilia. Journal of comparative Neurology and Psychology. Vol. 20, Nr. 5.

1908. Snessarew, Paul. Über die Nervenfasern im Rhinencephalon beim Frosche. Journal für Psychologie und Neurologie. Bd. 13 (Festschrift für Forel).

Edinger, Ludwig. Vorlesungen über den Bau der nervösen Zentralorgane des Menschen und der Tiere. Bd. 2.

Ariëns Kappers, C. U. Die Phylogenese des Rhinencephalons, des Corpus striatum und der Vorderhirnkommissuren. Folia Neuro-Biologica. Bd. 1, Nr. 2.

1899. Gaupp, Ernst. A. Eckers und R. Wiedersheims Anatomie des Frosches. II. Abteilung. Lehre vom Nerven- und Gefäßsystem.

1896. Ramon, Pedro. L'encéphale des Amphibiens. Bibliographie anatomique, 4e année Nr. 6.

1892. Edinger, Ludwig. Untersuchungen über die vergleichende Anatomie des Gehirns. 2. Das Zwischenhirn. Abhandlungen der Senckenb. naturf. Gesellschaft. Bd. 18.

1887/88. Edinger, Ludwig. Untersuchungen über die vergleichende Anatomie des Gehirns. 1. Das Vorderhirn. Abhandlungen der Senckenb. naturf. Gesellschaft. Bd. 15.

## Figurenbezeichnungen.

Fig. 1. Cellulae bulbares dorsales. Cellulae bulbares mediales. Cellulae bulbares ventrales. Radix olfactoria dorsalis. Radix olfactoria ventralis. Tractus olfactorius ventralis. Formatio bulbaris. Nervus olfactorius.

Fig. 2. Cellulae bulbares dorsales. Cellulae bulbares mediales. Cellulae bulbares ventrales. Radix olfactoria dorsalis. Radix olfactoria medialis. Radix olfactoria ventralis. Tractus olfactorius ventralis. Areal der Formatio bulbaris. Nervus olfactorius.

Fig. 3. Cellulae bulbares dorsales. Tuberculum bulbi dorso-laterale. Cellulae bulbares laterales. Cellulae bulbares mediales. Cellulae bulbares ventrales. Radix olfactoria dorsalis. Radix olfactoria medialis. Radix olfactoria lateralis. Ventriculus lateralis (bulbaris). Radix olfactoria ventralis. Tractus olfactorius ventralis. Tractus olfactorius medialis. Areal der Formatio bulbaris.

Fig. 4. Ventriculus lateralis. Cellulae mediales ventriculi. Cellulae laterales ventriculi. Bulbulus accessorius dorsalis. Areal der Formatio bulbaris. Radix olfactoria medialis. Radix olfactoria lateralis. Tractus olfactorius dorsalis. Kaudaler Längszug des Tractus olfactorius medialis. Tractus olfactorius medialis. Tractus olfactorius ventralis und Radix olfactoria ventralis. Prominentia ventro-lateralis.

Fig. 5. Dorsaler Teil des Tractus olfactorius medialis. Radix olfactoria medialis. Radix olfactoria lateralis. Cellulae mediales ventriculi. Ventriculus lateralis. Cellulae laterales ventriculi. Ventraler Teil des Tractus olfactorius medialis. Prominentia ventro-lateralis. Kaudal verlaufender Teil der Fasern zu den Cellulae superficiales ventro-laterales. Cellulae superficiales ventro-laterales. Fasern zu den Cellulae superficiales ventro-laterales. Prominentia dorso-lateralis. Areal des Bulbulus accessorius dorsalis. Prominentia dorsalis. Radix olfactoria lateralis. Areal

des Tractus olfactorius dorsalis und des kaudalen Längszuges des Tractus olfactorius dorsalis.

Fig. 6. Tractus olfactorius dorsalis. Radix olfactoria medialis. Dorsaler Teil des Tractus olfactorius medialis. Cellulae laterales Ventriculi. Ventriculus lateralis. Beginn des Primordium hippocampi. Nucleus medianus septi. Prominentia medialis. Ventraler Teil des Tractus olfactorius medialis. Prominentia ventro-lateralis. Fasern aus der Prominentia ventro-lateralis. Cellulae superficiales ventro-laterales. Fasergeflecht aus der Radix olfactoria lateralis und den Fasern aus der Prominentia ventro-lateralis. Radix olfactoria lateralis.

Fig. 7. Cellulae mediales ventriculi. Cellulae laterales ventriculi. Fasern des Primordium hippocampi zum medialen Vorderhirnbündel. Ventriculus lateralis. Primordium hippocampi. Plexus lateralis. Nucleus medianus septi. Nucleus lateralis septi. Tractus olfactorius medialis. Prominentia medialis. Mediales Vorderhirnbündel. Massa ventro-lateralis. Laterales Vorderhirnbündel. Prominentia lateralis. Sulcus endorhinalis. Fasern zum lateralen Vorderhirnbündel. Radiatio bulbo-corticalis. Tractus olfactorius dorsalis.

Fig. 8. Cellulae mediales ventriculi. Fasern des Primordium hippocampi. Fasern des Primordium hippocampi zum medialen Vorderhirnbündel. Primordium hippocampi. Fissura limitans hippocampi. Eminentia postolfactoria. Mediales Vorderhirnbündel. Prominentia ventralis. Nucleus basalis. Laterales Vorderhirnbündel. Plexus lateralis. Prominentia lateralis. Ventriculus lateralis. Cellulae laterales ventriculi.

Fig. 9. Paraphysis. Primordium hippocampi. Ventriculus lateralis. Tractus cortico-habenularis medialis. Tractus cortico-olfactorius medialis. Pars commissuralis des lateralen Vorderhirnbündels. Nucleus praeopticus. Pars commissuralis des medialen Vorderhirnbündels. Mediales Vorderhirnbündel. Prominentia ventralis. Laterales Vorderhirnbündel. Prominentia lateralis. Fasern des Primordium hippocampi.

Fig. 10. Paraphysis. Pars anterior des Tractus cortico-olfactorius medialis. Tractus cortico-olfactorius medialis (— — — — eingezeichnet nach dem Verhalten des Zuges drei Schnitte weiter kaudal). Ventriculus medius. Tractus cortico-habenularis medialis. Prominentia lateralis. Pars hypothalamica des basalen Vorderhirnbündels. Nucleus praeopticus. Recessus praeopticus. Tractus cortico-olfactorius medialis (und Tractus olfactorius habenularis medialis). Pars commissuralis des lateralen Vorderhirnbündels. Commissura hippocampi. Ventriculus lateralis. Laterales Vorderhirnbündel.

Fig. 11. Ganglion habenulae. Ventriculus Diencephali. Primordium hippocampi. Sulcus medialis thalami. Eminentia thalami. Sulcus ventralis thalami. Recessus praeopticus. Mediales Vorderhirnbündel. Laterales Vorderhirnbündel. Prominentia lateralis. Tractus cortico-habenularis und Commissura hippocampi und Tractus olfactorius habenularis medialis. Pars medullaris (s. post.) Commissurae hippocampi. Tractus cortico-habenularis (und Tractus olfacto-habenularis medialis).

Fig. 12. Ventriculus Diencephali. Sulcus medialis thalami. Tractus olfacto-habenularis lateralis. Eminentia thalami. Sulcus ventralis thalami. Recessus praeopticus. Mediales Vorderhirnbündel. Laterales Vorderhirnbündel. Prominentia lateralis. Tractus cortico-habenularis und Commissura hippocampi und Tractus olfacto-habenularis medialis. Tractus olfacto-habenularis lateralis.

Fig. 13. Tractus cortico-habenularis lateralis. Tractus olfacto-habenularis lateralis. Kaudaler Teil des Tractus cortico-habenularis medialis. Tractus cortico-hypothalamicus.

Fig. 14. Commissura habenularis. Tractus olfacto-habenularis lateralis. Tractus cortico-habenularis lateralis. Recessus praeopticus. Tractus cortico-hypothalamicus.

*Fig. 1.*

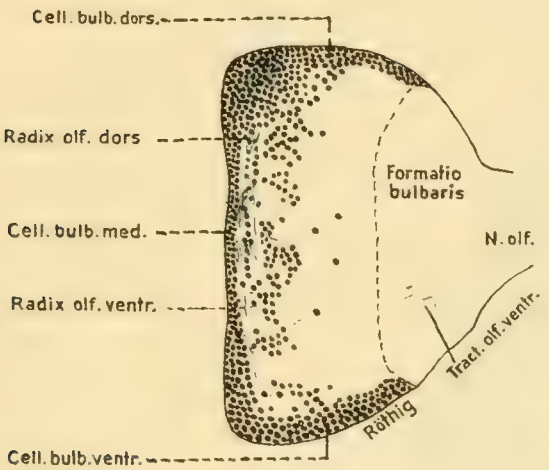



*Fig. 2.*

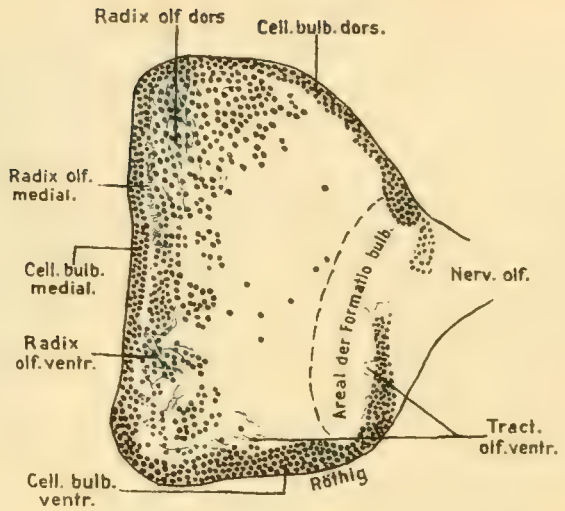



*Fig. 3.*

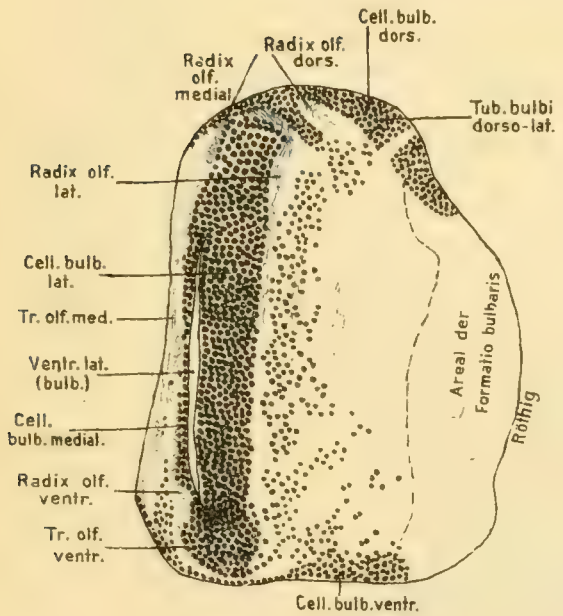
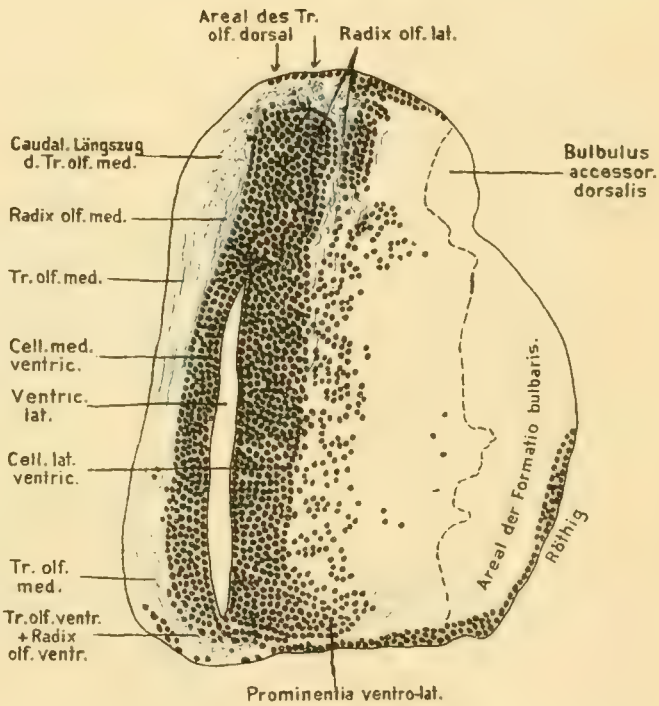



*Fig. 4.*




P. Röthig: Zellanordnungen und Faserzüge im Vorderhirn von *Siren lacertina.*

Taf. I.

*Fig. 5.*

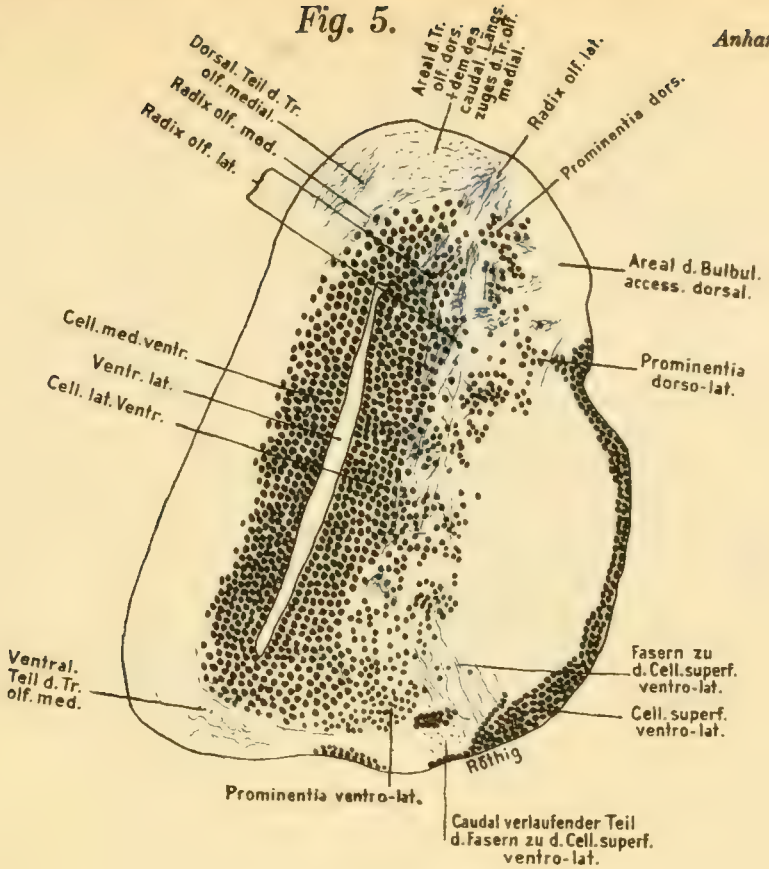
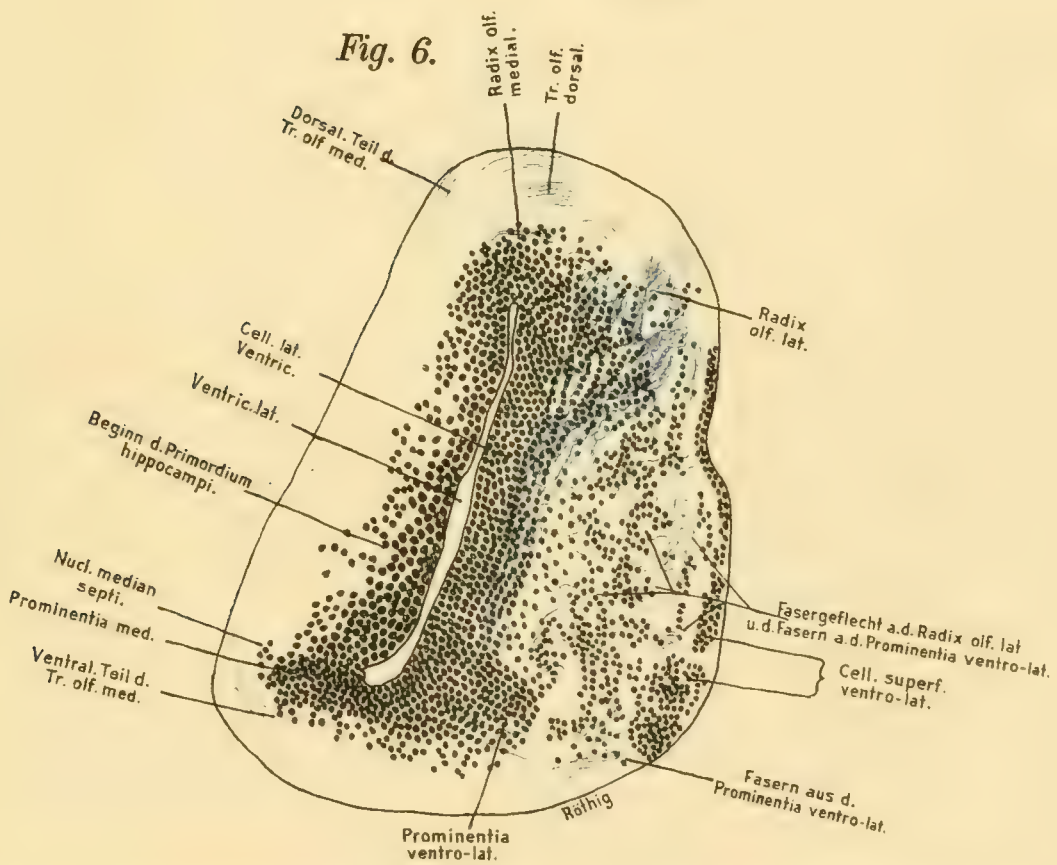



*Fig. 6.*




P. Röthig: Zellanordnungen und Faserzüge im Vorderhirn von *Siren lacertina.*

Taf. II.

*Fig. 7.*

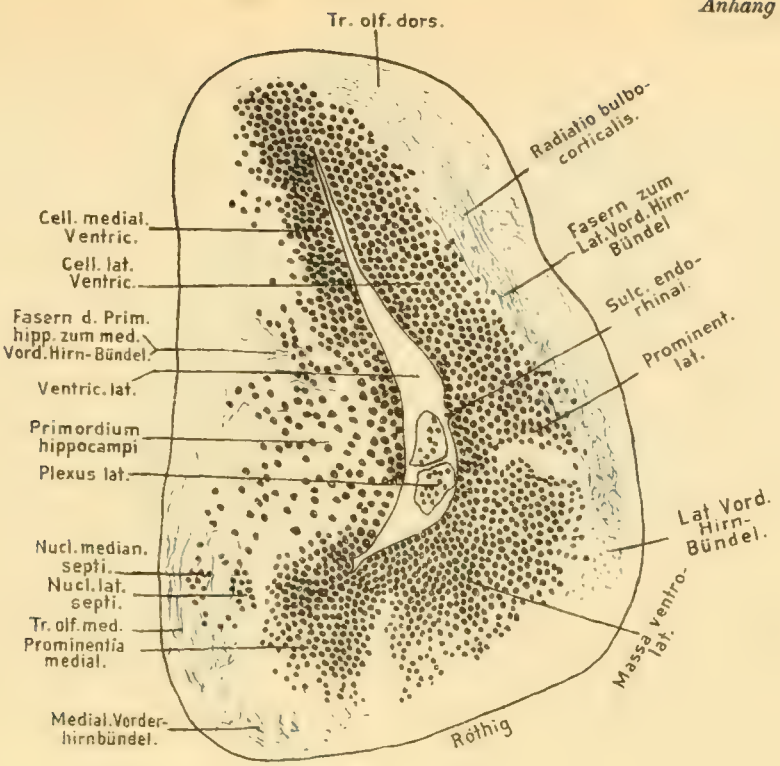
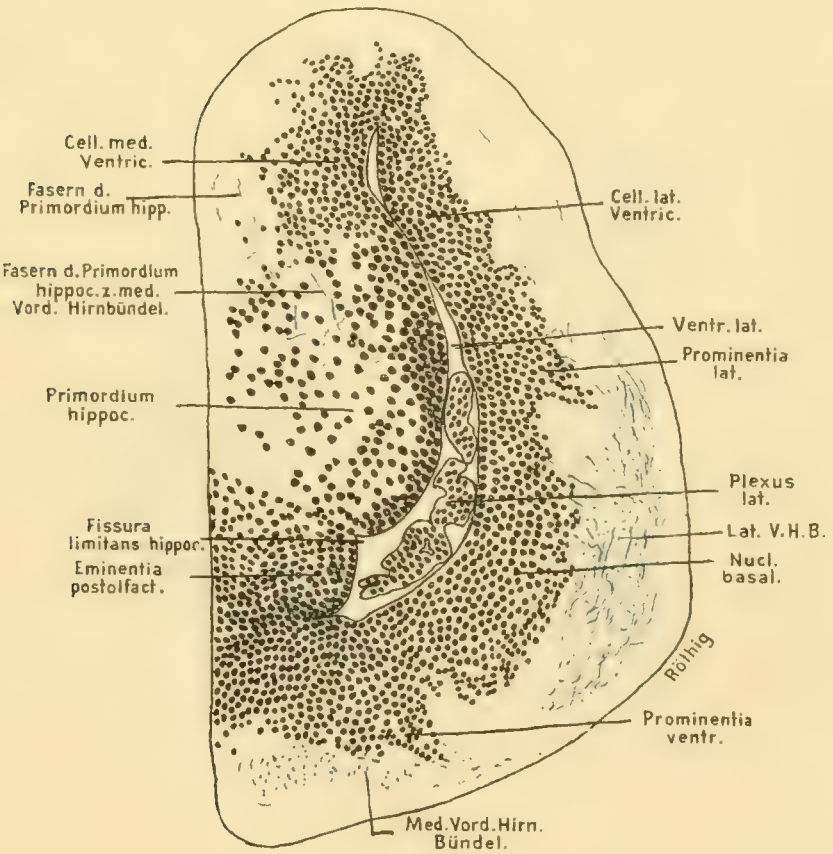



*Fig. 8.*




P. Röthig: Zellanordnungen und Faserzüge im Vorderhirn von *Siren lacertina.*

Taf. III.

*Fig. 9.*

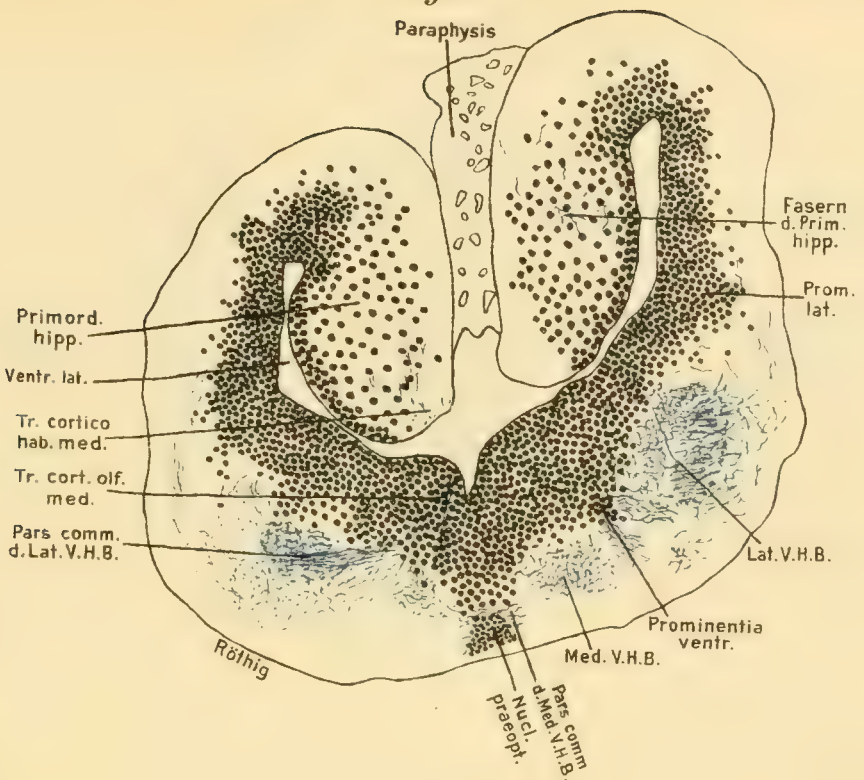
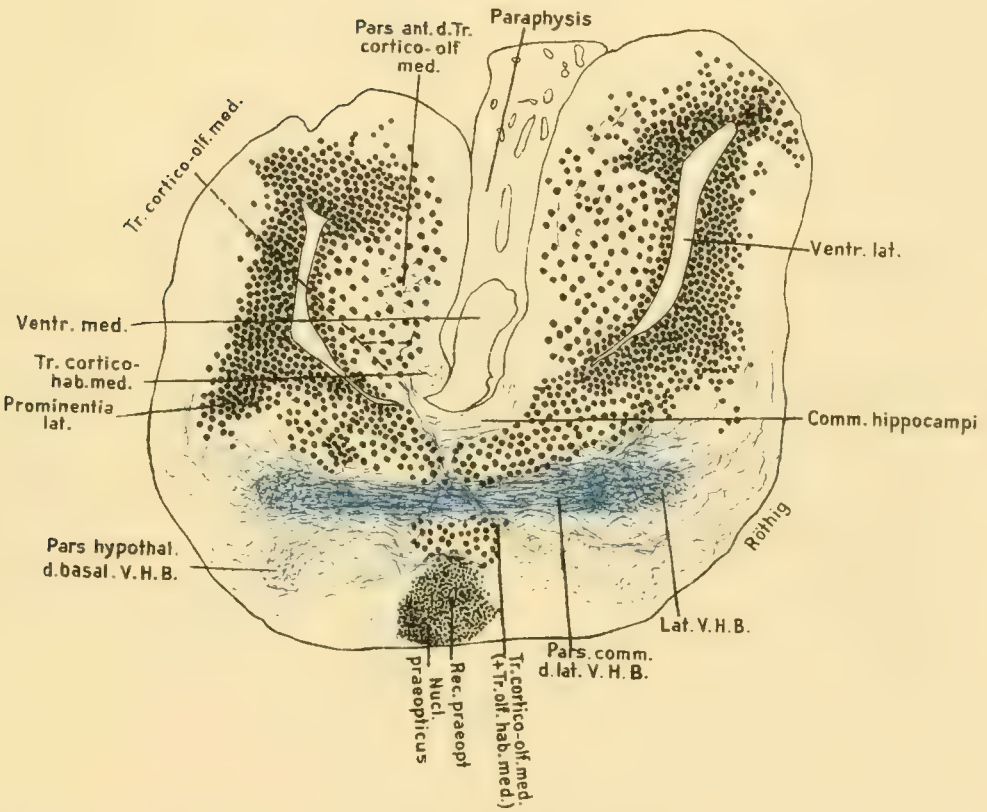



*Fig. 10.*




**P. Röthig: Zellanordnungen und Faserzüge im Vorderhirn von *Siren lacertina*.**

**Taf. IV.**

*Fig. 11.*

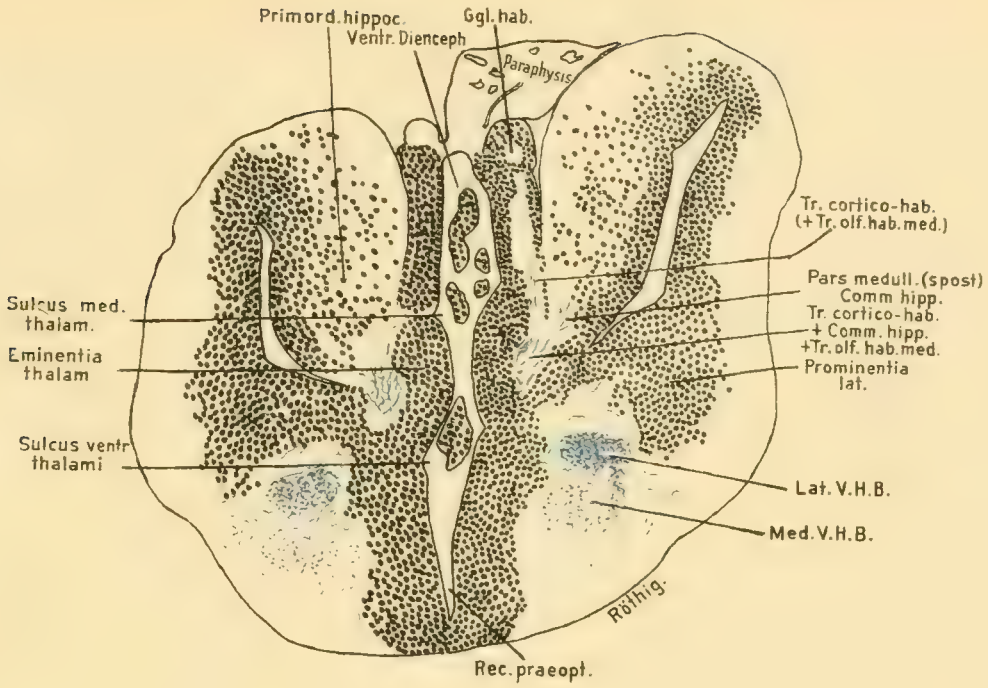
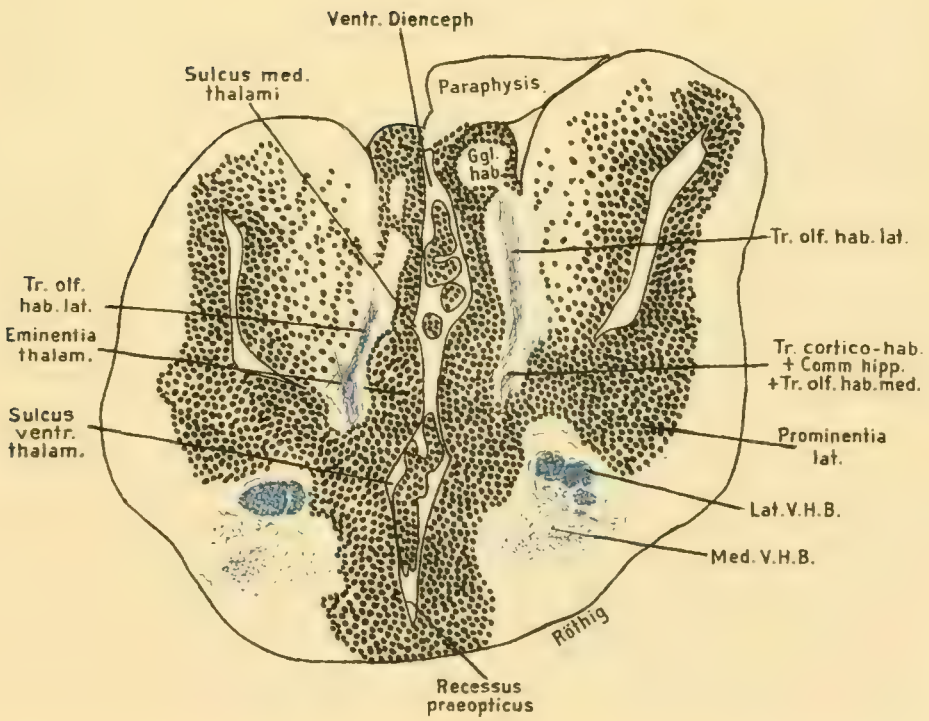



*Fig. 12.*

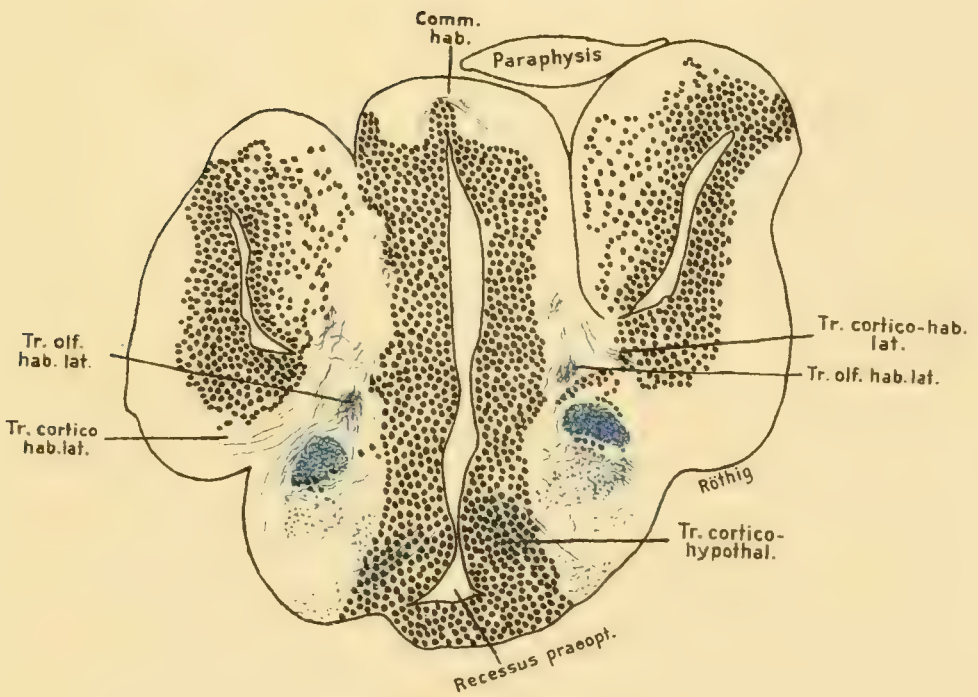



**P. Röthig: Zellanordnungen und Faserzüge im Vorderhirn von *Siren lacertina*.**

**Taf. V.**

*Fig. 13.*

*Fig. 14.*




P. Röthig: Zellanordnungen und Faserzüge im Vorderhirn von *Siren lacertina*.

Taf. VI.

# Über die Kerne des menschlichen Kleinhirns.

Von

Dr. K. AGADSCHANIANZ

in St. Petersburg.

Vorgelegt von Hrn. Waldeyer in der Sitzung der phys.-math. Classe am 18. Mai 1911.
Zum Druck verordnet am 1. Juni 1911, ausgegeben am 13. Juli 1911.

Im Jahre 1908/09 unternahm ich eine Untersuchung der Kleinhirnkerne auf Anregung des Hrn. Prof. L. Jacobsohn in dessen Laboratorium zu Berlin.

Meine Untersuchung sollte diesen Teil der großen Arbeit über die Kerne des menschlichen Hirnes darstellen, womit L. Jacobsohn und seine Schüler beschäftigt waren.

Als Ziel setzte ich mir das Studium aller Zellengebilde, die in der weißen Substanz des Kleinhirns anzutreffen sind, die gegenseitige Lagerung derselben zu verfolgen und die Morphologie der Zellen, die als Bestandteile der einen oder anderen Zellengruppe figurieren, zu studieren.

Der Kern, der im morphologischen Sinne einheitliche Zellengebilde besitzt, kann durch Bündel der weißen Substanz in zwei und mehr Gruppen geteilt werden, die bei näherer Kenntnis ihrer Embryologie, Morphologie und, soviel wie möglich, ihrer Funktion in der einen oder anderen Beziehung der Einheit unterworfen erscheinen, und umgekehrt können verschiedene Elemente durch mechanische Momente in die nächste Nachbarschaft gebracht werden, ohne daß eine Einheit ihrer Genese und Funktion besteht. Eine Vereinigung der Zellengruppen in den Begriff eines Kernes nicht nach ihrer Nachbarschaft, sondern nach ihrer genetischen und funktionellen Einheit, auch womöglich auf Grund von physiologischen Angaben, ist vor allem erstrebenswert. Im allgemeinen berührte ich auch die Embryologie der Kleinhirnkerne.

Das Gehirn wurde aus der Leiche 2—7 Stunden nach dem Tode entnommen. Das Kleinhirn wurde mit einem Teil des Hirnstammes durch einen Frontalschnitt abgetrennt und durch Frontalschnitte in 2—3 Stücke geteilt, die sofort in 96prozentigen Alkohol gebracht wurden. Im Laufe von 2—3 Tagen wurde der 96prozentige Alkohol täglich gewechselt; sodann wurden die genügend entwässerten Stücke in absoluten Alkohol über-

geführt, der den nachfolgenden Tag gewechselt wurde. Nachdem die Stücke somit 2 Tage in absolutem Alkohol gelegen hatten, wurden sie auf 24 Stunden in eine Mischung von absolutem Alkohol und Chloroform gebracht, sodann auf 24 Stunden in reines Chloroform, sodann in eine Lösung gleicher Teile von Chloroform und Paraffin (Schmelzpunkt 53—54°) auf 24 Stunden bei der Temperatur von 35—36°. Endlich, nachdem die Stücke 4—5 Stunden in reinem Paraffin (Schmelzpunkt 53—54°) bei 56—57° gestanden hatten, wurden sie in der letzten Portion des Paraffins abgekühlt. Die Färbung wurde nach Nißl mit Toluidinblau vollzogen.

Einem Studium wurden unterworfen:

1. Das Kleinhirn von einem 5monatigen Embryo. In Anbetracht des kleinen Umfanges des Kleinhirnes wurde das Stück in toto gehärtet, und Schnitte von 15—25 mm wurden ohne Verluste gemacht.

2. Das Kleinhirn eines 8—9monatigen Embryos. Vor der Härtung wurde das Kleinhirn in ein vorderes und hinteres Stück durch einen Frontalschnitt geteilt. In den letzten Schnitten des ersten Stückes und in den ersten Schnitten des zweiten erhielt ich einige unvollständige Präparate, die ein vollkommen bestimmtes Bild lieferten. Zwecks bequemerer Eingießung, um nicht mit zu großen Stücken zu manipulieren, in die das Paraffin schlecht eindringt, wurden beide Stücke (das vordere und hintere) durch einen Sagittalschnitt in eine größere linke und in eine kleinere rechte Hälfte geteilt, wobei die linke größere Hälfte nur der Bearbeitung unterzogen wurde. Somit wurde die Untersuchung nur auf Frontalschnitten geführt, wo eine Hemisphäre des Kleinhirnes mit dem Wurm und stellenweise einem kleinen Stück aus der anderen Hemisphäre vorhanden war.

3. Das Kleinhirn von erwachsenen Personen, und zwar von zwei Männern (von 35 und 27 Jahren) und einer Frau (von 30 Jahren). Jedesmal wurde das Kleinhirn frontal in 3 Stücke geteilt und durch einen Sagittalschnitt der kleinere rechte Teil, als überflüssig, abgeschnitten. Am Anfang und am Ende der Stücke mußte man bei den Schnitten im allgemeinen 1—2 mm an jedem Kleinhirn verlieren.

Dieser unbequeme Umstand wurde jedoch dadurch umgangen, daß jedes Kleinhirn frontal nicht an denselben Stellen zerschnitten wurde, so daß dadurch die folgende Serie die voraufgegangene ergänzen konnte.

Von den Erwachsenen starb einer an Nephritis, die zwei anderen an Lungentuberkulose. In allen Fällen wiesen sowohl das Gehirn als auch

seine Gefäße und die Hirnhäute weder makro- noch mikroskopisch (bei Untersuchung des Kleinhirns) pathologische Veränderungen auf.

In der weißen Substanz des Kleinhirns werden folgende Kerngebilde beschrieben, die auf der Präparatabbildung 1 zu sehen sind. Diese Abbildung stellt einen Kleinhirnschnitt eines 8—9monatigen Embryo vor (Paraffinpräparat), der auf der Abbildung dreimal vergrößert ist.

1. Der Kern, der auf Fig. 1 mit *a* bezeichnet ist, hat den Namen der Kleinhirnolive oder Nucleus dentatus.

Die Beschreibung dieses Kernes finden wir bei Vieussens unter dem Namen »substantia rhomboidea«, s. Corpus rhomboideum, bei Vicq d'Azyr unter dem Namen »corps festonné ou dentelé«, bei Rolando unter dem Namen »corpus denticulatum«. Die Literatur dieser Kerne ist in dem ausgezeichneten Buche von Ziehen und Zander[1] angeführt, wo auch eine ausführliche Beschreibung dieses Kernes gegeben wird.

Der ganze Kern, der eine zickzackförmige Linie vorstellt, erscheint von der medialen Seite geöffnet, weil der untere und obere Rand dieser Linie an der medialen Seite nicht zusammenfließen; von oben, unten und lateral beschreibt diese Linie einen zickzackförmigen unregelmäßigen Kontur des Buchstabens *C*. Der geöffnete Teil heißt Hilus nuclei dentati. Die zickzackförmige Linie der grauen Substanz erreicht eine unbedeutende Breite, die nur 2—3 Zellen umfaßt. Die Zellen liegen stellenweise sehr dicht aneinander. Somit bilden 2—3 Zellen, die sich in einer Reihe lagern, ein Band der grauen Substanz, das auf Paraffinpräparaten die Breite von etwa 1 mm hat. Der ganze Kern ist schräg gelagert, wobei sein Hauptdurchmesser von oben und medial nach unten und lateral sich hinzieht. Dieser größte Durchmesser des unregelmäßig umgrenzten Buchstabens *C* erreicht auf den Paraffinschnitten des Kleinhirns eines Erwachsenen eine Ausdehnung von 14 bis 15 mm, am Kleinhirn eines 8—9 Monate alten Embryo eine solche von 8 mm, bei einem Embryo von 5 Monaten eine solche von 5 bis 6 mm. Die größte Breite dieses Buchstabens *C* erstreckt sich auf denselben Schnitten bei Erwachsenen auf 6—7 mm. Der maximale Sagittaldurchmesser des Kernes (von vorn nach hinten) erreicht auf denselben Schnitten bei Erwachsenen 11—13 mm. Der ganze Kern liegt der Ventrikelhöhle näher; er läßt anderseits den ganzen lateralen Teil der weißen Substanz auf 5 bis

[1] Ziehen und Zander, Anatomie des Nervensystems. Jena 1903.

6 mm frei und vermischt sich nirgends mit der grauen Substanz des Wurms. Von der Substanz der Kleinhirnrinde steht der obere Rand des Nucleus dentatus 5—6 mm, der untere Rand 12—14 mm ab. Medial nähert sich der Nucleus dentatus dem Ventrikelrand beinahe vollständig. Hinsichtlich der anderen Grenzen des Kernes kann man die von Ziehen und Zander[1] gegebene Beschreibung anführen, mit der die Angaben meines makro- und mikroskopischen Studiums des Nucleus dentatus vollkommen übereinstimmen: »Dem Grunde des Sulcus superior anterior nähert sich der Kern bis auf 4 mm, im Bereich des Hinter- und Unterwurmes reicht der Nucleus dentatus mit seinem hinteren Abschnitt bis an das Marklager, welches die Uvula, die Pyramis und die der letzteren zugekehrten Windungen des Tuber vermis mit dem Hemisphärenmark verknüpft.«

Die sich lateral an den Nidus avis anschmiegende Zacke des Nucleus dentatus, das Spiculum nuclei dentati, wurde oben bereits erwähnt.

Die Substanz, die den Nucleus dentatus umringt, heißt seine (Stillings) »Vließregion«.

Der Nucleus dentatus nimmt allmählich okzipitalwärts den Charakter eines Ringes an, indem er seine Zackenform verliert, und dieser Ring geht, im Umfang abnehmend, in eine Gruppe von Zellen über, die allmählich verschwindet.

Auf Fig. 2 sehen wir die Abbildung der charakteristischen Zellen des Nucleus dentatus. Zwischen den ihrer Form nach verschiedensten Zellen sowie im embryonalen Nucleus dentatus bemerken wir viele polygonale Zellen mit gewöhnlich einer ausgedehnten Ecke, von welcher ein kurzer Protoplasmafortsatz abgeht. Abgesehen davon werden Zellen angetroffen, die das Aussehen eines unregelmäßig ausgedehnten Viereckes haben. Die Zellenkerne haben gewöhnlich keine deutlichen Konturen und fallen nicht durch ihre Größe auf. Pyramidale Zellen sowie auch solche, die eine dreieckige Form haben, gelingt es auf den Präparaten nicht zu erblicken. Die Zellen liegen im allgemeinen in solcher Entfernung voneinander und haben eine solche Größe, wie dies auf Fig. 2 abgebildet ist, die eine Vergrößerung von 225mal vorstellt.

Nach dem Charakter der Zellen zeichnet sich der Nucleus dentatus durch seine Specifität aus: seine Zellen gehen nicht in die benachbarten

[1] A. a. O.

Kerne über, deren Zellen, wie wir dieses weiterhin sehen werden, den Zellen des Nucleus dentatus ähnlich sind.

Die Morphologie der Zellen und die topographische Isoliertheit des Nucleus dentatus erlauben dieses Gebilde für einen selbständigen Kern zu halten.

2. Der nächste Kern (Fig. 1b) ist unter dem Namen Embolus oder Nucleus emboliformis bekannt. Er hat diesen Namen erhalten, weil er scheinbar der offenen Stelle, dem Hilus nuclei dentati, entspricht und diese Stelle ausfüllt. Seinen Namen Propf hat dieser Kern von Stilling erhalten. Auf unseren Präparaten lagert sich der Embolus selten direkt medial vom Hilus nuclei dentati; am häufigsten liegt der Nucleus emboliformis am Rande des medialen oberen Endes des zickzackförmigen Bandes, das die Konturen des Nucleus dentatus vorstellt. Hier hat die Hauptachse des Nucleus emboliformis eine Richtung von oben und medial nach unten und lateral.

Der Kern selbst hat die Form einer Pyramide, deren Basis nach oben und medial gerichtet ist. Das vordere Ende des Kernes (zerebralwärts) liegt 1—1½ mm hinter dem vorderen Rande des Nucleus dentatus und erreicht nicht die Basis des Sulcus praecentralis; der hintere Abschnitt (okzipitalwärts) gelangt nicht bis zum Sulcus inferior posterior.

Im allgemeinen ist der vordere-hintere Durchmesser des Kernes 2—3 mm kleiner als der des Nucleus dentatus. Auf Paraffinschnitten hat der Kern in sagittaler Richtung an der Stelle seiner größten Entwickelung in den vorderen Abschnitten des Kleinhirns eine vertikale Größe von 2½—3 mm; nach hinten verkleinert er sich; der Querdurchmesser beträgt an der Pyramidenbase etwa 2 mm, nach aufwärts verschmälert sich die Pyramide. Man muß bemerken, daß der Embolus beim 5monatigen Embryo im Vergleich zum Embolus eines 8—9monatigen und zum Embolus eines Erwachsenen gegenüber den anderen Kernen des Kleinhirnes unverhältnismäßig groß ist. Es ist möglich, daß dieser Kern im embryonalen Leben eine wesentlichere Rolle spielt und in dieser Lebensperiode eine bedeutendere Entwickelung erlangt, wonach er allmählich regressiert und in seiner Entwickelung zurückbleibt.

Auf Fig. 3 sehen wir die Abbildung der Emboluszellen. Beim Embryo zeigen die Zellen des Embolus eine sehr schwache Entwickelung, indem sie sich ihrer Größe nach den Zellen der Molekularschicht des Kleinhirns

nähern. Beim Erwachsenen, wie wir dieses auf der Abbildung sehen, finden wir vollkommen formierte Zellen, die in morphologischer Beziehung sehr mannigfaltig sind. Es ist weiterhin wichtig, daß hier, ebenso wie im Kern Stillings, dem Dachkern (siehe unten), Zellen vorkommen, die teilweise an die pyramidalen erinnern, mit großen schollenartigen Körnern von Nißl, was scheinbar auf ihre motorische Funktion hindeutet. Diese Zellen sind im Embolus nicht häufig und werden zuweilen zwischen einigen Zellen eines anderen Typus angetroffen. Fig. 3 zeigt bei Vergrößerung 255 den Charakter der Emboluszellen, ihre Größe, ihre gegenseitige Lagerung und ihre Entfernung voneinander.

Zwischen den Zellen des Embolus sind, abgesehen von den pyramidenförmigen, andere Zellen von unregelmäßiger Form mit meniskenartigen Einbuchtungen an den Seiten charakteristisch. Diese Zellen vermischen sich allmählich mit spindelförmigen Zellen kleineren Umfanges, die im Dachkern Stillings prävalieren bzw. zuweilen auf der Strecke zwischen Nucleus emboliformis und dem Dachkerne anzutreffen sind, und dieser Weg, der aus Zellen vermischten Typus, die in unbedeutender Anzahl anzutreffen sind, besteht, verbindet beide Kerne miteinander und erscheint als Übergang zwischen den Substanzen beider Kerne. Auf diesen Umstand muß man seine Aufmerksamkeit lenken. Es ist wahr, daß weder die spindelförmigen Zellen des Dachkernes in der Substanz der Emboli noch die für den Nucleus emboliformis charakteristischen Zellen (unregelmäßiger Form mit meniskenartigen Einbuchtungen an den Seiten) im Dachkern vorkommen, jedoch die Anwesenheit von pyramidenförmigen Zellen in beiden Kernen und der gemischte Zwischenweg, der beide Kerne verbindet, spricht für einen genetischen, vielleicht auch funktionellen Zusammenhang beider Kerne.

3. Nucleus tecti, Dachkern (Fig. 1—c). Dieser Kern ist zuerst von Stilling[1] beschrieben worden. Er befindet sich direkt neben der Mittellinie und lagert sich an ihren beiden Seiten, so daß die mediale Seite beider Bildungen beinahe direkt einander anliegt. Die ganze Masse der Kerne befindet sich zwischen dem medialen Teil des Embolus und der Medianlinie der weißen Substanz des Wurmes, die sich direkt über dem vierten Ventrikel befindet. Dieser Kern ist von ovaler Form, ist mit

[1] Stilling, Neue Untersuchungen über den Bau des kleinen Gehirns des Menschen. Kassel 1878.

seiner Querachse, die die maximalste ist, über dem Ventrikel selbst gelagert, wobei die Achse von oben und medial nach unten und lateral verläuft. Auf Paraffinschnitten beträgt die maximale Querachse des Kernes 3 mm, die Breite 2 mm. Die Länge von vorn nach hinten beträgt 7—8 mm. Zuweilen sind seltene, zerstreute spindelförmige Zellen anzutreffen, die durch die Mediallinie durchgehen und die Substanz beider Nuclei tecti untereinander verbinden.

Hinsichtlich der weiteren Topographie des Kernes kann man hinzufügen, daß die Resultate meiner Untersuchungen mit den Beschreibungen übereinstimmen, daß der Kern »sich von der Basis der Lingula bis nahe zum Ursprung des Markastes der Pyramis erstreckt«.

Es gelang mir nicht, wie Stilling, die innere, mittlere und äußere Fortsetzung des Kernes zu verfolgen. Auf meinen Schnitten sammeln sich einzelne Zellen allmählich in eine kompakte Kernmasse an, und diese Masse verkleinert sich okzipitalwärts, so wie sie anwächst, ohne in irgendwelche einzelne Gruppen zu zerfallen.

Zwischen der Substanz der Nuclei tecti und dem Ependym des Ventrikels ist nirgends eine erhebliche kompakte Masse von weißer Substanz zu beobachten. Stellenweise liegt der Kern direkt dem Ependym an.

Fig. 4 zeigt bei Vergrößerung 255 den Charakter der Zellen, ihre gegenseitige Lagerung und die Entfernung zwischen ihnen im Nucleus tecti.

Besondere Aufmerksamkeit lenken auf sich pyramidenförmige Zellen mit großen Körnern und deutlich umgrenzten Kernen. Auf diese Zellen hat besonders L. Jakobsohn in seiner Arbeit, Über die Kerne des menschlichen Hirnstammes, Abhandl. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. 1909, die Aufmerksamkeit gelenkt. Die Zellen werden, wie schon erwähnt, zuweilen auch im Nucleus emboliformis angetroffen, obgleich diese Zellen im Nucleus tecti sich bis zu breiterem Umfang ausbilden. Außerdem zeichnet sich der Kern durch eine große Anzahl kleiner, bald mehr, bald weniger ausgedehnter spindelförmiger Zellen aus. Im Vergleich mit den anderen Kleinhirnkernen erscheinen diese spindelförmigen Zellen des Nucleus tecti wohl als die kleinsten zwischen allen anderen Zellentypen der Kleinhirnkerne.

Nach den Untersuchungen von Weidenreich[1] hat der Nucleus medialis bei einfacheren Säugetieren in bezug auf die Morphologie seiner Zellen viel

[1] Weidenreich. Zur Anatomie der zentralen Kleinhirnkerne der Säuger. Zeitschr. f. Morphologie und Anthropologie. Bd. I, 1899.

Gemeinschaftliches mit den Strangzellen: den Deiterschen und den Bechterewschen.

Beim Menschen sind sogar schon im embryonalen Entwicklungsstadium (bei einem 5monatigen Fötus) die Zellen der Nuclei tecti deutlich differenziert, wie dieses auf unserm Präparat (Fig. 4) abgebildet ist, und man kann dieselben nicht mit den Zellen der Kerne des Hirnstammes verwechseln.

Es ist jedoch möglich, daß beim Menschen in den früheren Entwicklungsstadien und bei einigen Tieren der Nucleus tecti ein undifferenziertes Ganzes mit den Deiterschen und Bechterewschen Kernen bildet.

4. Globulus, Nucleus globosus, Kugelkern, erscheint am häufigsten paarweise in jeder Hemisphäre. Dieses Gebilde (Fig. 1d und d') ist ebenfalls zuerst von Stilling[1] beschrieben worden. Soviel ich mich auf Grund meiner Präparate überzeugt habe, sind diese Kerne ihrer Größe und Lokalisation nach äußerst unbeständig. Sehr oft gibt es in einer Hälfte des Kleinhirns nur einen Nucleus globosus, der andere (gewöhnlich der untere) fehlt vollständig. Der eine von diesen Kernen (Fig. 1—d') wird am häufigsten medial vom Nucleus emboliformis zwischen denselben und dem Nucleus tecti beschrieben. Auf meinen Präparaten liegt dieser Kern unter dem Nucleus emboliformis am Rande des Ventrikels in der Gegend des Hilus des Nucleus dentatus.

Der Kugelkern erstreckt sich zerebralwärts gewöhnlich bis zur Höhe des Anfanges des Nucleus tecti, okzipitalwärts jedoch endet er auf Paraffinpräparaten 2—3 mm vor dem hinteren Ende des Nucleus tecti.

Die stärkste Entwickelung hat der Kugelkern in den Abschnitten des Gehirns, wo der Dachkern an Umfang schon abzunehmen anfängt.

Der ganze Kern hat die Form einer Kugel und weist unter dem Mikroskop 10—20 Zellen auf, die ziemlich nahe voneinander gelagert sind.

Auf Paraffinpräparaten erreicht der ganze Durchmesser des Kernes bei einem 8—9monatigem Embryo selten mehr als $1\frac{1}{2}$—2 mm, im Kleinhirn eines Erwachsenen hat er eine größere Entwickelung. Die Größe des Kernes, wie gesagt, ist großen Schwankungen unterworfen. Ungefähr auf denselben Schnitten trifft man einen analogen Kern an von ebensolcher schwankenden Größe und ebensolcher Form. Dieser letztere lagert sich bald unter dem ersten am Ventrikelrand, am unteren Ende des N. dentatus (auch am Hilus

[1] A. a. O.

N. dentati), bald in den oberen Abschnitten der weißen Substanz des Kleinhirns gerade über dem N. emboliformis unter der Wurmrinde. Irgendwelche wesentliche Veränderungen der Kugelform in den beiden Kernen gelingt es auf den Schnitten nicht zu beobachten.

Beide Kerne wachsen am Anfang der Schnitte ziemlich schnell zu einer Kugelform an und hören ebenso schnell am Ende der Schnitte auf, wobei sie die allgemeine Form des Kernes nicht verändern. Beide Kerne sind deutlich abgegrenzt, und Übergänge der Zellen in die benachbarten Kerne sind nicht zu beobachten.

Hinsichtlich des Charakters der Zellen muß man bemerken, daß beide Nuclei globosi sich hinsichtlich ihrer Bestandteile durch ihre spezifische Identität auszeichnen, was auf ihre genetische und vielleicht auch funktionelle Einheit hinweist. Die Elemente beider Kugelkerne sind identisch und sind spezifisch von den Elementen anderer Kerngebilde des Kleinhirns unterschieden.

Fig. 5 zeigt bei Vergrößerung 255 den Charakter der Zellen, ihre gegenseitige Lagerung und Größe in beiden Kugelkernen. Die Zellen sind im allgemeinen nicht groß, von polygonaler Form mit deutlich ausgesprochenem linsenförmigen Kern und einem kleinen Nucleolus. Im Protoplasma der Zellen sind kleine Schollen von gefärbten Körnchen anzutreffen. Im allgemeinen haben die Zellen zarte Konturen und liegen stellenweise dicht einander an.

5. Beim weiteren Studium der weißen Substanz, nachdem okzipitalwärts die letzten Spuren aller Kerne überhaupt, speziell der Nuclei dentati verschwunden sind, wurden in den hintersten Abschnitten des Kleinhirns auf meinen Präparaten ein bzw. mehrere Kerngebilde angetroffen, die, soviel ich weiß, noch von keinem Autor beschrieben worden sind. Die Kerne lagern in der weißen Substanz ungefähr 3 mm okzipitalwärts vom hinteren Ende des Nucleus dentatus. Auf einem Frontalschnitt durch diese Gegend hat die weiße Substanz der Kleinhirnhemisphäre eine dreieckige Form (Fig. 6); von den Seiten dieses Dreiecks ist die eine nach medial, die andere der basalen und die dritte der konvexen Hemisphärenfläche zugekehrt.

Von den erwähnten Kerngebilden lagert der größere parallel der unteren kurzen Seite des Dreiecks und liegt dem unteren lateralen spitzen Winkel des Dreiecks näher. Dieses Kerngebilde selbst besteht an der Stelle seiner größten Entwickelung (s. Fig. 6) aus einem größeren unteren und einem

kleinen oberen Abschnitte, die durch Zellenübergangselemente miteinander verbunden sind. Das andere Kerngebilde lagert parallel der medialen Seite des Dreiecks und stellt ein schmales, zungenartiges Gebilde dar. Beide Kerne liegen nur wenig von der Rinde entfernt. Während der größere an der unteren Seite des Dreiecks stets etwas von der Rinde getrennt blieb, war der kleinere an der medialen Seite des Dreiecks bis dicht an die Körnerschicht der Rinde zu verfolgen. Diese Lage der Kerngebilde in der nächsten Nachbarschaft der Kleinhirnrinde erinnert lebhaft an eine ähnliche Bildung des Großhirns, das sog. Claustrum. Die Kerngebilde zeigten auf allen Schnitten den gleichen Zellbau. Auf einer Schnittserie durch die Kleinhirnhemisphäre eines Erwachsenen waren die Kerne nicht ausgeprägt.

Am Kleinhirn eines 8—9monatigen Embryo (s. Fig. 7) war nur das größere Kerngebilde vorhanden; an der Stelle der maximalsten Entwickelung des Kernes war eine Teilung der Kernmasse in zwei Gruppen nicht zu beobachten. Bei Erwachsenen beträgt auf Paraffinschnitten der sagittale Durchmesser des größten Kernes 2—2½ mm, bei einem 8—9monatigen Embryo ist er jedoch nicht länger als 1½ mm. An der Stelle der größten Breite des Kernes ist die Länge seiner Basis auf Paraffinschnitten bei Erwachsenen 6 mm und erreicht 3½ mm auf denselben Schnitten im Kleinhirn eines 8—9monatigen Embryo. Die Höhe des größeren Kernes (beider Abschnitte, die beim Erwachsenen übereinander liegen) erreicht bei Erwachsenen 4 mm, bei einem 8—9monatigen Embryo 1½ mm. Bei einem Embryo von 5 Monaten gelang es nicht, einen dem beschriebenen im strengen Sinne analogen Kern zu beobachten; nur zuweilen werden in der beschriebenen Stelle einzelne Zellen angetroffen, die morphologisch den Zellen des beschriebenen Kernes beim 8—9monatigen Embryo und beim Erwachsenen ähnlich sind.

Fig. 8 zeigt den Charakter, die Größe und die gegenseitige Lagerung der Zellen der beschriebenen Kerne bei Vergrößerung 255. Der Zellkörper erinnert teilweise an den Kopf eines Froschembryo, besitzt eine deutlich umgrenzte Kernsubstanz (nebst einem Nucleolus), die eine dem Zellkörper analoge Form hat. Die Zellen sammeln sich stellenweise in dichteren Gruppen an, stellenweise sind sie mehr zerstreut. Vom Zellkörper geht ein langer Protoplasmafortsatz ab. Äußerst selten gehen vom Zellkörper 2 kürzere Fortsätze (siehe Fig. 8) ab, oder ein Fortsatz teilt sich beim Austritt aus dem Zellkörper in zwei Teile. Diese Fortsätze sind in den Kleinhirnzellen

eines 8—9monatigen Embryo bedeutend kürzer, zuweilen fehlen sie vollständig; indessen trifft man beim Embryo neben Zellen, die einen kurzen Fortsatz haben, auch solche, wie sie die Zellen des Kernes beim Erwachsenen zeigen. Im Protoplasma dieser Zellen sind größere Körner nicht zu beobachten.

Wir wollen uns jetzt mit der differenziellen Diagnostik der soeben beschriebenen Kerngebilde gegenüber den übrigen Kernen des Kleinhirns beschäftigen, mit denen sie eventuell verwechselt werden könnten. Der Processus tegmentosus lateralis nuclei pontis kann, wie L. Jacobsohn[1] gezeigt hat, und wie es auch in meinen Präparaten zu sehen ist, sich mit einzelnen Zellinseln in die weiße Substanz des Kleinhirns hinaufziehen. Die Ausbreitung dieser Zellinseln gelangt jedoch niemals so weit okzipitalwärts in die weiße Substanz des Kleinhirns, und der Charakter der Zellen dieser zu den Brückenkernen gehörenden Inseln unterscheidet sich deutlich von den Zellen der beschriebenen Kerne, besonders durch die ovale Form und den Charakter des Fortsatzes seiner Zellen.

Die Purkinjeschen Zellen unterscheiden sich von den Zellen der beschriebenen Kerne durch die baumartigen, sich verzweigenden Fortsätze, die sie besitzen; außerdem werden die Purkinjeschen Zellen weiter entfernt von der Kleinhirnrinde in der weißen Substanz nirgends angetroffen in Form von mehr oder weniger großen Zellenanhäufungen.

Die Zellen der beschriebenen Kerne unterscheiden sich von den Zellen des Nucleus dentatus dadurch, daß die Zellen des Nucleus dentatus am häufigsten polygonal und an irgendeiner Ecke durch den von demselben abgehenden Fortsatz gedehnt erscheinen.

Außerdem werden im Nucleus dentatus Zellen angetroffen, die die Form eines unregelmäßig ausgedehnten Vierecks haben. Die Zellsubstanz der von uns beschriebenen Kerne erinnert, wie gesagt, an den Kopf eines Froschembryo, und von der Zelle geht zuweilen ein dichotomisch sich teilender Fortsatz ab.

Außerdem haben die beschriebenen Kerne auch ihrer Lokalisation nach nichts Gemeinsames mit der Lokalisation des Nucleus dentatus, und öfters werden zwischen beiden Kernen Übergangszellen vermißt, wie dieses in meinen Präparaten des 9monatigen Embryo der Fall war.

[1] Über die Kerne des menschlichen Hirnstammes. Abh. d. Berl. Akad. d. Wiss. Berlin 1909.

Der charakteristischen Morphologie der Zellen und ihrer anatomischen Abgesondertheit nach haben diese Kerne in der Anatomie des Kleinhirns Recht auf eine selbständige Stellung. Ich bezeichne sie demgemäß als Nuclei cerebelli posteriores.

Außer den beschriebenen Zellen in der weißen Substanz des Kleinhirns erhebt sich von beiden Seiten des Ventrikels an seinem Rande, beinahe bis zur Höhe des N. tecti, aus dem Hirnstamm eine Reihe von pigmentierten Zellen, die eine Fortsetzung des Locus caeruleus darstellen. Auf diese Zellen lenkte zuerst Meynert und in neuerer Zeit L. Jacobsohn die Aufmerksamkeit. Man muß noch bemerken, daß diese Zellen in der weißen Substanz des Kleinhirns, die nicht dem Locus caeruleus anliegt, keine weitere Verbreitung erhalten.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Prof. L. Jacobsohn für seine wertvollen Ratschläge bei Ausführung dieser Arbeit ergebensten Dank auszusprechen.

## Figurenerklärung.

Fig. 1. Allgemeine Übersicht eines Frontalschnittes durch das Kleinhirn. Färbung nach Nißl (Modifikation mit Toluidinblau). Vergrößert 3 mal. Embryo von 9 Monaten; a) N. dentatus, b) N. emboliformis, c) N. tecti, d und d') N. globosus.

Fig. 2. Charakteristische Zellen des Nucleus dentatus; dieselbe Färbung. Vergrößerung 225, aus dem Gehirn eines 9 monatigen Embryo entnommen. Am Gehirn eines Erwachsenen ist die Morphologie dieselbe, die Zellen sind nur etwas größer.

Fig. 3. Charakteristische Zellen aus dem Nucleus emboliformis. Dieselbe Färbung und Vergrößerung. Auch aus dem Gehirn eines 9 monatigen Embryo entnommen; beim Erwachsenen dieselben Beziehungen wie auch im vorhergehenden Kerne.

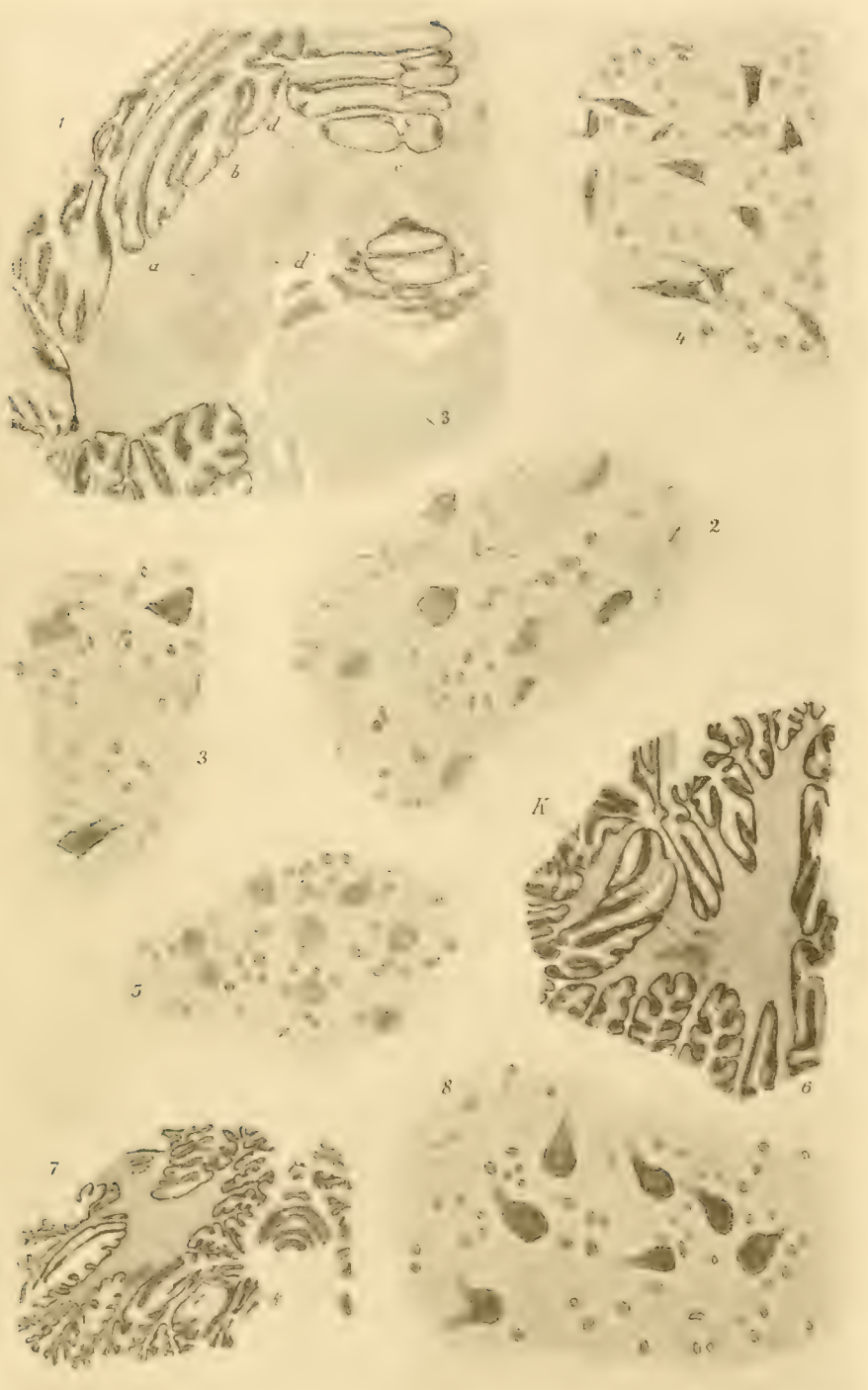
Fig. 4. Charakteristische Zellen des Dachkerns. Färbung, Vergrößerung, das Alter des Gehirns sind dieselben wie auch auf den vorhergehenden Präparaten, ebenso wie auch die Beziehung zu den Zellen des Nucleus tecti eines Erwachsenen.

Fig. 5. Charakteristische Zellen aus dem Kugelkern. Färbung, Vergrößerung und Alter des Gehirns dieselben wie auch in den vorhergehenden Präparaten, ebenfalls die Beziehung zu den Zellen des Kugelkerns Erwachsener.

Fig. 6 zeigt die von mir beschriebenen unbeständigen Kerne im Gehirn eines Erwachsenen in 1½ facher Vergrößerung. Färbung nach Nißl (Modifikation Toluidinblau).

Fig. 7 zeigt denselben Kern in derselben Vergrößerung und bei derselben Färbung aus dem Gehirn eines 9 monatigen Embryo.

Fig. 8. Charakteristische Zellen des von mir beschriebenen Kernes aus dem Gehirn eines Erwachsenen bei Vergrößerung 225 (Nißl Toluidinblau). Bei einem 8—9 monatigen Embryo sind dieselben Zellen zu beobachten, jedoch kleiner, und der Fortsatz ist schwächer ausgebildet.




K. Agadschanianz: Über die Kerne des menschlichen Kleinhirns.

# Beweis des Satzes, daß jedes hinreichend kleine, im wesentlichen stetig gekrümmte, singularitätenfreie Flächenstück auf einen Teil einer Ebene zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich abgebildet werden kann.

Von

Dr. LEON LICHTENSTEIN.

Vorgelegt von Hrn. Schwarz in der Sitzung der phys.-math. Klasse am 15. Juni 1911.
Zum Druck verordnet am 22. Juni 1911, ausgegeben am 25. März 1912.

In seiner Abhandlung »Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird«[1] hat Gauß zuerst bewiesen, daß jedes analytische Flächenstück auf einen Teil einer Ebene zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich abgebildet werden kann. Das Problem der konformen Abbildung wurde von Gauß auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung im Gebiete komplexer veränderlicher Größen zurückgeführt. Dieses Hilfsmittel versagt, sobald die in Frage kommenden Funktionen nur für reelle Werte, nicht aber zugleich für komplexe Werte ihrer Argumente erklärt sind, also stets dann, wenn das vorgelegte Flächenstück ein nichtanalytisches Flächenstück ist. Es erhebt sich daher die Frage, ob und unter welchen Voraussetzungen auch nichtanalytische Flächenstücke auf einen Teil einer Ebene konform abgebildet werden können. Diese Frage ist, soweit dem Verfasser bekannt ist, zuerst von Lipschitz aufgeworfen worden. Lipschitz hat darauf hingewiesen, daß das Problem auf die Bestimmung irgendeines Systems von Lösungen von zwei simultanen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit nichtanalytischen Koeffizienten zurückgeführt werden kann. Die Existenz eines solchen Systems von Lösungen wirklich nachzuweisen, war indessen Lipschitz nicht gelungen.

Am Schluß einer dem Verfahren der sukzessiven Approximationen gewidmeten Abhandlung teilt Hr. Picard einige, die konforme Abbildung nichtanalytischer Flächenstücke betreffende Betrachtungen mit[2]. Die Darlegungen von Hrn. Picard geben zu einigen Bedenken Anlaß. Hr. Picard

[1] Gauß, Werke, vierter Band, S. 193—216.

[2] Vgl. E. Picard, Sur les méthodes d'approximations successives dans la théorie des équations différentielles, als Note I im vierten Bande des Werkes von Hrn. Darboux, Théorie générale des surfaces, Paris, 1896, veröffentlicht.

bedient sich des Verfahrens der sukzessiven Approximationen. Gewisse hierbei auftretende Funktionen sind nur für reelle Werte ihrer Argumente erklärt und können, weil sie nach der Voraussetzung nichtanalytische Funktionen ihrer Argumente sind, für komplexe Werte dieser Argumente nicht erklärt werden, während den Argumenten schon bei der Durchführung der zweiten Approximation komplexe Werte beigelegt werden.

Die vorliegende Arbeit ist der Beantwortung der von Lipschitz aufgeworfenen Frage gewidmet. Ihr Umfang erklärt sich durch das Bestreben, die Voraussetzungen, von denen bei der Behandlung des Problems ausgegangen wird, nach Möglichkeit zu reduzieren.

Es mögen $x$ und $y$ die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes in der Ebene, $X, Y, Z$ ebensolche Koordinaten eines Punktes im Raume, $c$ ein zusammenhängendes, ganz im Endlichen liegendes Gebiet in der Ebene $(x, y)$ bezeichnen. Es seien die Gleichungen

$$(1.) \qquad \begin{cases} X = X(x, y), \\ Y = Y(x, y), \\ Z = Z(x, y) \end{cases}$$

vorgelegt. Die Funktionen $X(x, y)$, $Y(x, y)$, $Z(x, y)$ seien als reelle, eindeutige und stetige Funktionen der beiden reellen Argumente $x$ und $y$ im Gebiete $c$ erklärt. Es wird vorausgesetzt, daß diese Funktionen stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen. Es sei $\omega(x, y)$ irgendeine dieser partiellen Ableitungen; es mögen ferner $(x, y)$ und $(x+h, y+h')$ die Koordinaten zweier beliebigen Punkte des Gebietes $c$ bedeuten. Es wird angenommen, daß die Funktion $\omega(x, y)$ der Ungleichheitsbedingung

$$|\omega(x+h, y+h') - \omega(x, y)| < A_0\{|h| + |h'|\},$$

worin $A_0$ eine gewisse positive Zahlgröße bezeichnet, genügt.

Durch die Gleichungen (1.) wird dem Gebiete $c$ ein ganz im Endlichen liegendes Stück $C$ einer Fläche zugeordnet[1]. Es wird angenommen, daß die Funktionaldeterminanten

---

[1] Wie in dem dritten Kapitel näher ausgeführt wird, besitzen die Funktionen $\omega(x, y)$, außer vielleicht in einer gewissen Menge von Punkten vom Flächenmaße Null, beschränkte partielle Ableitungen erster Ordnung. Die vorgelegte Fläche kann als im wesentlichen stetig gekrümmt bezeichnet werden.

Eine Funktion einer oder mehrerer reeller Veränderlichen heißt in einem endlichen Gebiete beschränkt, wenn ihr absoluter Betrag in diesem Gebiete eine endliche obere Grenze hat.

$$\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(x,y)}, \frac{\partial(Z,X)}{\partial(x,y)}, \frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)}$$

nicht gleichzeitig verschwinden.

Alsdann gilt der Satz:

In der Umgebung eines jeden Punktes im Innern des Gebietes $C$ läßt sich ein Flächenstück abgrenzen, welches zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich auf ein ebenes Flächenstück abgebildet werden kann.

Das Quadrat der Maßzahl der Länge eines Linienelementes des Flächenstückes $C$ sei durch die Gleichung

$$(2.) \qquad ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2$$

dargestellt. Die Funktionen $E$, $F$ und $G$ sind eindeutig und stetig. Sie erfüllen den über die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktionen $X$, $Y$, $Z$ gemachten Annahmen zufolge im Gebiete $c$ die Ungleichheitsbedingungen

$$\left.\begin{array}{l} |E(x+h,y+h')-E(x,y)| \\ |F(x+h,y+h')-F(x,y)| \\ |G(x+h,y+h')-G(x,y)| \end{array}\right\} < A_1\{|h|+|h'|\},$$

worin $A_1$ eine gewisse positive Größe bezeichnet. Die Größen $E$, $G$ und $EG-F^2$ sind wesentlich positiv.

Die behauptete Möglichkeit der konformen Abbildung wird dargetan sein, sobald es gelingt, zwei reelle, mit ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung eindeutige und stetige Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ der Gleichung

$$(3.) \qquad \lambda(Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2) = du^2 + dv^2$$

gemäß zu bestimmen, in welcher der Multiplikator $\lambda$ eine wesentlich positive, eindeutige und stetige Funktion der beiden reellen Argumente $x$ und $y$ bezeichnet. Für die Gleichung (3.) kann man auch setzen

$$(4.) \qquad \mu\left(\sqrt{E}dx + \frac{F+i\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}}dy\right) = du + idv,$$

worin der Faktor $\mu$ eine von Null verschiedene, eindeutige und stetige komplexe Funktion der reellen Argumente $x$ und $y$ bezeichnet. Aus der Gleichung (4.) werden die weiteren Relationen

$$(5.)\qquad \begin{cases} \mu\sqrt{E} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ \mu\dfrac{F + i\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ E\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = (F + i\sqrt{EG - F^2})\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \end{cases}$$

abgeleitet. Die zuletzt angegebene Beziehung führt zu den beiden Gleichungen

$$(6.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{F\dfrac{\partial u}{\partial x} - E\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{G\dfrac{\partial u}{\partial x} - F\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{cases}$$

Es wird nun zunächst die zusätzliche Voraussetzung gemacht, daß die Funktionen $E$, $F$ und $G$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben, die ihrerseits der Hölderschen Bedingung genügen. Aus den Formeln (6.) ergibt sich, wenn vorausgesetzt wird, daß die Funktion $u$ auch noch stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung hat, die partielle Differentialgleichung

$$(7.)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F\dfrac{\partial u}{\partial y} - G\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F\dfrac{\partial u}{\partial x} - E\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) = 0.$$

Ist insbesondere die Größe $F$ gleich $0$, d. h. stellen die Kurvenscharen auf der Fläche, welche entsprechend durch die Beziehung $x = \text{konst.}$ und die Beziehung $y = \text{konst.}$ charakterisiert sind, zwei orthogonale Kurvenscharen dar, so gehen die Differentialgleichungen (6.) und (7.) über in

$$(8.)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}\sqrt{E} &= -\frac{\partial v}{\partial x}\sqrt{G}, \\ \frac{\partial v}{\partial y}\sqrt{E} &= \frac{\partial u}{\partial x}\sqrt{G}, \end{aligned}$$

$$(9.)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{G}{E}}\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{E}{G}}\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Um die stellenweise etwas umständlichen Rechnungen übersichtlicher zu gestalten, wird den folgenden Betrachtungen der soeben betrachtete besondere Fall zugrunde gelegt. Der allgemeine Fall erledigt sich in ganz

ähnlicher Weise; auf die etwa erforderlichen Modifikationen wird am Schluß des dritten Kapitels kurz hingewiesen.

Im zweiten Kapitel dieser Arbeit wird eine Grundlösung der Differentialgleichung (9.) aufgefunden und damit die Möglichkeit der konformen Abbildung eines stetig gekrümmten Flächenstückes auf einen Teil einer Ebene in dem vorher erwähnten besonderen Falle bewiesen. In dem dritten Kapitel werden alsdann die beschränkenden Voraussetzungen fallen gelassen, und es wird ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen (8.) angegeben. Hiermit ist die eingangs aufgestellte Behauptung vollständig bewiesen.

In dem ersten Kapitel werden einige Hilfssätze, welche den wohlbekannten Sätzen über die partiellen Differentialquotienten des logarithmischen Potentials analog sind, vorausgeschickt.

Die Betrachtungen des ersten und des zweiten Kapitels sind gewissen Untersuchungen von Hrn. E. E. Levi und der Methode der Parametrix von Hrn. Hilbert nahe verwandt. (Man vergleiche hierzu die näheren Ausführungen in § 3 des dritten Kapitels.) In einer im Jahre 1907 veröffentlichten Abhandlung[1] gibt Hr. E. E. Levi den Beweis der Existenz der Grundlösung der allgemeinen linearen partiellen Differentialgleichung der $2p$ten Ordnung des total elliptischen Typus. Insbesondere beweist Hr. E. E. Levi die Existenz einer Grundlösung der partiellen Differentialgleichung

$$(10.) \qquad a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0\,, \qquad ac - b^2 > 0\,.$$

Die Koeffizienten $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ stellen reelle und stetige Funktionen dar, die folgende Eigenschaften haben. Die Funktionen $a$, $b$ und $c$ haben stetige partielle Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung, die ihrerseits der Hölderschen Bedingung oder einer verwandten Bedingung des Hrn. Dini genügen. Die Funktionen $d$, $e$ und $f$ haben stetige partielle Ableitungen erster Ordnung.

Auf das in der vorliegenden Arbeit behandelte Problem angewandt, ergeben die Resultate des Hrn. E. E. Levi nach einigen weiteren Überlegungen den Beweis der Möglichkeit der konformen Abbildung, wenn die

[1] Vgl. E. E. Levi, Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1907, S. 275—317.

Funktionen $E$, $F$ und $G$ stetige partielle Ableitungen der beiden ersten Ordnungen haben und diese Ableitungen ihrerseits der Hölderschen Bedingung oder einer verwandten Bedingung von Hrn. Dini genügen. Das Krümmungsmaß der vorgelegten Fläche ist alsdann eine stetige Funktion der Parameter $x$ und $y$, die stetige, der Hölderschen oder der Dinischen Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt. Demgegenüber sei hervorgehoben, daß bei der durch die Gleichungen (1.) dargestellten Fläche Hauptkrümmungsradien im allgemeinen nicht überall vorhanden zu sein brauchen.

In einer späteren Abhandlung[1] gibt Hr. E. E. Levi, gestützt auf die vorerwähnten Ergebnisse, die Auflösung gewisser Randwertaufgaben in der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen der $2p$ten Ordnung von total elliptischem Typus.

In seiner sechsten Mitteilung zur Theorie der linearen Integralgleichungen beschäftigt sich Hr. Hilbert mit der Bestimmung der auf der ganzen Kugel stetigen Lösung gewisser partieller Differentialgleichungen von der Form (10.). Der Einfachheit halber nimmt Hr. Hilbert die Koeffizienten $a$, $b$ usw. als analytische Funktionen der beiden Veränderlichen $x$ und $y$ an. Es würde indessen genügen, die Existenz und die Stetigkeit der partiellen Ableitungen bis zu einer gewissen endlichen Ordnung vorauszusetzen.

Ein einfaches Verfahren, welches gestattet, verschiedene Randwertprobleme der Theorie der partiellen Differentialgleichung (10.) auf die Auflösung linearer Integralgleichungen zurückzuführen, soll im Anschluß an die vorliegende Arbeit an einer anderen Stelle mitgeteilt werden.

## Kapitel I.

### § 1.

Es mögen bezeichnen:

$T$ irgendein von einer geschlossenen, sich selbst weder durchschneidenden noch berührenden stetig gekrümmten Kurve $S$ begrenztes Gebiet in der Ebene, deren Punkte das Wertsystem $(x, y)$ geometrisch darstellen,

[1] Vgl. E. E. Levi, I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali, Memorie della Società Italiana delle Scienze, Serie 3ª, Tomo XVI, Roma 1909.

$a(x,y)$ und $b(x,y)$ zwei wesentlich positive, eindeutige und stetige Funktionen, welche stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben, $V(x,y)$ eine eindeutige und stetige, der Hölderschen Bedingung genügende Funktion, $(x,y)$ einen Punkt im Innern des Gebietes $T$.

Es sei

$$(11.) \qquad J(x,y) = \iint_T \log\left[b(\xi,\eta)(\xi-x)^2 + a(\xi,\eta)(\eta-y)^2\right] \cdot V(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta .$$

Es wird behauptet:

Das Integral $J(x,y)$ hat stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

Es ist

$$(12.) \quad \begin{aligned} &a(x,y)\frac{\partial^2 J(x,y)}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 J(x,y)}{\partial y^2} = \\ &\qquad = 4\pi\sqrt{a(x,y)\,b(x,y)}\,V(x,y) + \iint_T K(x,y;\xi,\eta)\,V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta , \\ &K(x,y;\xi,\eta) = \\ &\qquad = \left[a(x,y)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\log\left\{b(\xi,\eta)(\xi-x)^2 + a(\xi,\eta)(\eta-y)^2\right\} . \end{aligned}$$

Die Funktion $K(x,y;\xi,\eta)$ verhält sich stetig, außer wenn $x=\xi$, $y=\eta$. Das Produkt

$$[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2]^{\frac{1}{2}} K(x,y;\xi,\eta)$$

übersteigt dem absoluten Betrage nach eine angebbare Größe nicht und hat, als Funktion von $\xi$ und $\eta$ betrachtet, im Punkte $(x,y)$ eine Unbestimmtheitsstelle.

## Beweis.

Es sei $T^*$ das von dem Kreise vom Halbmesser $\varrho'$ um den Punkt $(x,y)$ als Mittelpunkt begrenzte endliche Gebiet, $(x_1,y_1)$ irgendein Punkt im Innern des Gebietes $T^*$. Es sei zur Vereinfachung

$$a = a(x,y)\ , \quad b = b(x,y)\ , \quad a_1 = a(x_1,y_1)\ , \quad b_1 = b(x_1,y_1)\ ,$$
$$\alpha = a(\xi,\eta)\ , \quad \beta = b(\xi,\eta)$$

gesetzt. Es ist identisch

$$J(x_1,y_1) = J_1(x_1,y_1) + J_2(x_1,y_1),$$

$$(13.)\qquad J_1(x_1,y_1) = \iint_T \log\left\{b(\xi-x_1)^2 + a(\eta-y_1)^2\right\}\cdot V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

$$J_2(x_1,y_1) = \iint_T \log\frac{\beta(\xi-x_1)^2+\alpha(\eta-y_1)^2}{b(\xi-x_1)^2+a(\eta-y_1)^2}\cdot V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

und

$$\frac{J(x_1+\Delta x_1,y_1)-J(x_1,y_1)}{\Delta x_1} = \frac{J_1(x_1+\Delta x_1,y_1)-J_1(x_1,y_1)}{\Delta x_1} + \frac{J_2(x_1+\Delta x_1,y_1)-J_2(x_1,y_1)}{\Delta x_1}.$$

Sind nun die beiden partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\iint_T \log\left\{b(\xi-x_1)^2 + a(\eta-y_1)^2\right\}\cdot V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \frac{\partial J_1(x_1,y_1)}{\partial x_1}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\iint_T \log\frac{\beta(\xi-x_1)^2+\alpha(\eta-y_1)^2}{b(\xi-x_1)^2+a(\eta-y_1)^2}\cdot V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \frac{\partial J_2(x_1,y_1)}{\partial x_1}$$

vorhanden, so existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial J(x_1,y_1)}{\partial x_1}$ und es ist identisch

$$(14.)\qquad \frac{\partial J(x_1,y_1)}{\partial x_1} = \frac{\partial J_1(x_1,y_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial J_2(x_1,y_1)}{\partial x_1}.$$

Ist insbesondere $x_1 = x$, $y_1 = y$, so findet man

$$(15.)\qquad \frac{\partial J(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial J_1(x_1,y_1)}{\partial x_1}\Bigg|_{\substack{x_1=x\\y_1=y}} + \frac{\partial J_2(x_1,y_1)}{\partial x_1}\Bigg|_{\substack{x_1=x\\y_1=y}}.$$

Für die auf der rechten Seite dieser Gleichung befindlichen Ausdrücke darf man nicht einfacher $\frac{\partial J_1(x,y)}{\partial x}$ und $\frac{\partial J_2(x,y)}{\partial x}$ setzen, weil bei der Bildung der zuletzt genannten Differentialquotienten die Größen $a$ und $b$ ebenfalls würden verändert werden müssen.

Wie in dem Folgenden gezeigt werden wird, ist

$$(16.)\qquad \frac{\partial J_1(x_1,y_1)}{\partial x_1} = \iint_T \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\log\left\{b(\xi-x_1)^2 + a(\eta-y_1)^2\right\}\right] V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

und

$$(17.)\qquad \frac{\partial J_2(x_1,y_1)}{\partial x_1} = \iint_T \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\log\frac{\beta(\xi-x_1)^2+\alpha(\eta-y_1)^2}{b(\xi-x_1)^2+a(\eta-y_1)^2}\right] V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

somit

$$(18.)\qquad \frac{\partial J(x_1,y_1)}{\partial x_1} = \iint_T \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\log\left\{\beta(\xi-x_1)^2 + \alpha(\eta-y_1)^2\right\}\right] V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Jetzt wird, wie folgt, weiter geschlossen. Es ist der Beziehung (14.) gemäß

$$\frac{\partial J(x+\Delta x, y)}{\partial x} = \frac{\partial J_1(x_1, y_1)}{\partial x_1}\Big|_{\substack{x_1=x+\Delta x\\ y_1=y}} + \frac{\partial J_2(x_1, y_1)}{\partial x_1}\Big|_{\substack{x_1=x+\Delta x\\ y_1=y}}.$$

Es ist ferner nach der Formel (15.)

$$\frac{\partial J(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial J_1(x_1, y_1)}{\partial x_1}\Big|_{\substack{x_1=x\\ y_1=y}} + \frac{\partial J_2(x_1, y_1)}{\partial x_1}\Big|_{\substack{x_1=x\\ y_1=y}},$$

daher

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial J(x+\Delta x, y)}{\partial x} - \frac{\partial J(x, y)}{\partial x}\right] = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial J_1(x_1, y_1)}{\partial x_1}\Big|_{\substack{x_1=x+\Delta x\\ y_1=y}} - \frac{\partial J_1(x_1, y_1)}{\partial x_1}\Big|_{\substack{x_1=x\\ y_1=y}}\right] +$$
$$+ \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial J_2(x_1, y_1)}{\partial x_1}\Big|_{\substack{x_1=x+\Delta x\\ y_1=y}} - \frac{\partial J_2(x_1, y_1)}{\partial x_1}\Big|_{\substack{x_1=x\\ y_1=y}}\right].$$

Sind nun die partiellen Ableitungen

$$(19.)\qquad \frac{\partial^2 J_1(x_1, y)}{\partial x_1^2}\Big|_{\substack{x_1=x\\ y_1=y}} \text{ und } \frac{\partial^2 J_2(x_1, y_1)}{\partial x_1^2}\Big|_{\substack{x_1=x\\ y_1=y}}$$

vorhanden, so existiert die Ableitung $\frac{\partial^2 J(x, y)}{\partial x^2}$ und hat den Wert

$$(20.)\qquad \frac{\partial^2 J_1(x_1, y_1)}{\partial x_1^2}\Big|_{\substack{x_1=x\\ y_1=y}} + \frac{\partial^2 J_2(x_1, y_1)}{\partial x_1^2}\Big|_{\substack{x_1=x\\ y_1=y}}.$$

Analoge Beziehungen gelten für die partiellen Ableitungen des Integrals $J$ in bezug auf die Variable $y$.

## § 2.

Es werden jetzt die beiden Integrale $J_1(x_1, y_1)$ und $J_2(x_1, y_1)$ einzeln betrachtet.

Das Integral $J_1(x_1, y_1)$ kann man durch die Substitution

$$(21.)\quad \sqrt{b}\,\xi = \bar{\xi},\quad \sqrt{b}\,x_1 = \bar{x}_1,\quad \sqrt{a}\,\eta = \bar{\eta},\quad \sqrt{a}\,y_1 = \bar{y}_1,\quad V(\xi, \eta) = \overline{V}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$$

auf die Form

$$J_1(x_1, y_1) = \frac{1}{\sqrt{ab}}\iint_{\overline{T}} \log\left\{(\bar{\xi}-\bar{x}_1)^2 + (\bar{\eta}-\bar{y}_1)^2\right\}\cdot \overline{V}(\bar{\xi}, \bar{\eta})\, d\bar{\xi}\, d\bar{\eta}$$

bringen. Das Gebiet $\overline{T}$, über welches die zweifache Integration zu erstrecken ist, ist hierbei das Gebiet, welches durch die Substitution (21.) dem Gebiete $T$ zugeordnet wird. Da die Funktion $\overline{V}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ der Hölder-

schen Bedingung genügt, so besitzt das Integral $J_1(x_1, y_1)$ stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Es ist

$$\frac{\partial J_1(x_1,y_1)}{\partial \bar{x}_1} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \iint_{\bar{T}} \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \log \left\{ (\bar{\xi}-\bar{x}_1)^2 + (\bar{\eta}-\bar{y}_1)^2 \right\} \right] \bar{V}(\bar{\xi},\bar{\eta}) d\bar{\xi} d\bar{\eta},$$

mithin

$$(22.) \qquad \frac{\partial J_1(x_1,y_1)}{\partial x_1} = \iint_T \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \log \left\{ b(\xi-x_1)^2 + a(\eta-y_1)^2 \right\} \right] V(\xi,\eta) d\xi d\eta$$

und

$$\frac{\partial^2 J_1}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 J_1}{\partial \bar{y}_1^2} = \frac{1}{b} \frac{\partial^2 J_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 J_1}{\partial y_1^2} = \frac{4\pi}{\sqrt{ab}} \bar{V}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = \frac{4\pi}{\sqrt{ab}} V(x_1, y_1).$$

Für $x_1 = x$, $y_1 = y$ folgt hieraus

$$(23.) \qquad a \left[ \frac{\partial^2 J_1(x_1,y_1)}{\partial x_1^2} \right]_{\substack{x_1=x \\ y_1=y}} + b \left[ \frac{\partial^2 J_1(x_1,y_1)}{\partial y_1^2} \right]_{\substack{x_1=x \\ y_1=y}} = 4\pi\sqrt{ab}\, V(x,y).$$

Es ist nunmehr zu zeigen, daß auch das Integral $J_2(x_1, y_1)$ stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitzt.

Es sei $x_2 = x_1 + \delta$, $y_2 = y_1$ und es sei $K$ das von dem Kreise vom Halbmesser $\varrho'' > 2|\delta|$ um den Punkt $(x_1, y_1)$ als Mittelpunkt begrenzte endliche Gebiet, das ganz im Innern des Gebietes $T$ gelegen sein mag. Der Einfachheit halber sei in dem Folgenden $\delta > 0$ vorausgesetzt.

Es ist

$$(24.) \qquad \begin{aligned} J_2(x_1,y_1) &= J_3(x_1,y_1) + J_4(x_1,y_1), \\ J_3(x_1,y_1) &= \iint_K \log \frac{\beta(\xi-x_1)^2 + \alpha(\eta-y_1)^2}{b(\xi-x_1)^2 + a(\eta-y_1)^2} \cdot V(\xi,\eta) d\xi d\eta, \\ J_4(x_1,y_1) &= \iint_{T-K} \log \frac{\beta(\xi-x_1)^2 + \alpha(\eta-y_1)^2}{b(\xi-x_1)^2 + a(\eta-y_1)^2} \cdot V(\xi,\eta) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

$$(25.) \qquad \frac{\partial J_4(x_1,y_1)}{\partial x_1} = \iint_{T-K} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \log \frac{\beta(\xi-x_1)^2 + \alpha(\eta-y_1)^2}{b(\xi-x_1)^2 + a(\eta-y_1)^2} \right] V(\xi,\eta) d\xi d\eta =$$

$$= \iint_{T-K} \frac{2(\xi-x_1)(\eta-y_1)^2(ab-a\beta)}{[b(\xi-x_1)^2 + a(\eta-y_1)^2][\beta(\xi-x_1)^2 + \alpha(\eta-y_1)^2]} V(\xi,\eta) d\xi d\eta.$$

Es sei $\varepsilon$ eine beliebig kleine positive Größe. Das Integral

$$\iint_T \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \log \frac{\beta(\xi-x_1)^2 + \alpha(\eta-y_1)^2}{b(\xi-x_1)^2 + a(\eta-y_1)^2} \right] V(\xi,\eta) d\xi d\eta =$$

$$= \iint_T \frac{2(\xi-x_1)(\eta-y_1)^2(ab-a\beta)}{[b(\xi-x_1)^2 + a(\eta-y_1)^2][\beta(\xi-x_1)^2 + \alpha(\eta-y_1)^2]} V(\xi,\eta) d\xi d\eta$$

hat eine bestimmte Bedeutung. Es genügt, durch die Gleichungen $\xi - x_1 = r\cos\varphi$, $\eta - y_1 = r\sin\varphi$ Polarkoordinaten einzuführen, um sich hiervon zu überzeugen.

Es sei

$$M = \mathrm{Max}(\alpha, \beta), \qquad m = \mathrm{Min}(\alpha, \beta)$$

im Gebiete $T$. Der Ausdruck

$$\left| \iint\limits_K \frac{2(\xi - x_1)(\eta - y_1)^2 (\alpha b - a\beta)}{[b(\xi - x_1)^2 + a(\eta - y_1)^2][\beta(\xi - x_1)^2 + \alpha(\eta - y_1)^2]} V(\xi, \eta) d\xi\, d\eta \right| =$$

$$= \left| \int_0^{\varrho''} \int_0^{2\pi} \frac{2(\alpha b - a\beta)\cos\varphi \sin^2\varphi}{[b\cos^2\varphi + a\sin^2\varphi][\beta\cos^2\varphi + \alpha\sin^2\varphi]} V(\xi, \eta) dr\, d\varphi \right| < \frac{8\pi\varrho'' M^2}{m^2} \mathrm{Max}\,|V(\xi, \eta)|$$

wird mit dem Radius $\varrho''$ zugleich unendlich klein. Man kann daher eine Größe $\bar{\varrho}$ so klein annehmen, daß für alle Werte $\varrho'' \leqq \bar{\varrho}$

$$(26.) \quad \left| \frac{\partial J_4(x_1, y_1)}{\partial x_1} - \iint\limits_T \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \log \frac{\beta(\xi - x_1)^2 + \alpha(\eta - y_1)^2}{b(\xi - x_1)^2 + a(\eta - y_1)^2}\right] V(\xi, \eta) d\xi\, d\eta \right| =$$

$$= \left| \iint\limits_K \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \log \frac{\beta(\xi - x_1)^2 + \alpha(\eta - y_1)^2}{b(\xi - x_1)^2 + a(\eta - y_1)^2}\right] V(\xi, \eta) d\xi\, d\eta \right| < \varepsilon$$

wird. Es wird jetzt gezeigt, daß der Differenzenquotient

$$(27.) \qquad \frac{1}{\delta}[J_3(x_2, y_1) - J_3(x_1, y_1)]$$

mit der Größe $\varrho''$ zugleich unendlich klein wird, welchen Wert die Differenz $x_2 - x_1 = \delta < \frac{1}{2}\varrho''$ auch haben mag.

Zum Beweise wird der Kreis $K$ durch die Gerade, welche auf der Verbindungsgeraden der Punkte $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_1)$ in ihrer Mitte senkrecht steht, in zwei Teilgebiete $K_1$ und $K_2$ geteilt. Die Abszissen aller Punkte des Gebietes $K_1$ sind $\leqq \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, diejenigen der Punkte des Gebietes $K_2$ dagegen $\geqq \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Der Ausdruck (27.) hat den Wert

$$(28.) \quad \frac{1}{\delta} \iint\limits_K \log \frac{[\beta(\xi - x_2)^2 + \alpha(\eta - y_1)^2][b(\xi - x_1)^2 + a(\eta - y_1)^2]}{[b(\xi - x_2)^2 + a(\eta - y_1)^2][\beta(\xi - x_1)^2 + \alpha(\eta - y_1)^2]} \cdot V(\xi, \eta) d\xi\, d\eta$$

$$= \frac{1}{\delta} \iint\limits_{K_1} + \frac{1}{\delta} \iint\limits_{K_2} = X_1 + X_2.$$

Das Integral $X_1$ kann man in der Form darstellen

$$X_1 = \frac{1}{\delta}\iint_{K_1} \log(1+\tau)\cdot V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

$$\tau = \frac{2(a\beta-ab)\,(\eta-y_1)^2\,(x_1-x_2)\,(\xi-\frac{1}{2}(x_1+x_2))}{[b(\xi-x_2)^2+a(\eta-y_1)^2]\,[\beta(\xi-x_1)^2+a(\eta-y_1)^2]}, \quad \tau > -1.$$

Es ist nun

$$|\log(1+\tau)| \leqq \tau, \quad \text{wenn } \tau \geqq 0,$$

und

$$|\log(1+\tau)| \leqq \frac{|\tau|}{1+\tau}, \quad \text{wenn } -1 < \tau \leqq 0,$$

daher sicher

$$\left|\frac{1}{\delta}\log(1+\tau)\right| \leqq \frac{1}{\delta}\left\{|\tau| + \frac{|\tau|}{1+\tau}\right\} = \frac{2\,|a\beta-ab|\,|\eta-y_1|^2\,|\xi-\frac{1}{2}(x_1+x_2)|}{W(a,b;x_2,y_1)\,W(\alpha,\beta;x_1,y_1)} +$$

$$+ \frac{2\,|a\beta-ab|\,|\eta-y_1|^2\,|\xi-\frac{1}{2}(x_1+x_2)|}{W(\alpha,\beta;x_2,y_1)\,W(a,b;x_1,y_1)},$$

$$W(a,b;x,y) = b(\xi-x)^2+a(\eta-y)^2.$$

Es ist nun in allen Punkten $(\xi,\eta)$ des Gebietes $K_1$

$$\left|\xi-\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right| < |\xi-x_2|, \qquad 2\,|\xi-x_2|\,|\eta-y_1| \leqq (\xi-x_2)^2+(\eta-y_1)^2,$$

somit

$$|X_1| < \iint_{K_1}\left\{\frac{2\,|a\beta-ab|\,|\eta-y_1|^2\,|\xi-x_2|}{W(a,b;x_2,y_1)\,W(\alpha,\beta;x_1,y_1)} + \frac{2\,|a\beta-ab|\,|\eta-y_1|^2\,|\xi-x_2|}{W(a,b;x_1,y_1)\,W(\alpha,\beta;x_2,y_1)}\right\}|V(\xi,\eta)|\,d\xi\,d\eta.$$

Ferner ist

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{|\eta-y_1|\,|\xi-x_2|}{b(\xi-x_2)^2+a(\eta-y_1)^2} \\ \dfrac{|\eta-y_1|\,|\xi-x_2|}{\beta(\xi-x_2)^2+a(\eta-y_1)^2}\end{array}\right\} < \frac{(\eta-y_1)^2+(\xi-x_2)^2}{2m[(\xi-x_2)^2+(\eta-y_1)^2]} = \frac{1}{2m}, \qquad |a\beta-ab| < 2M^2.$$

Setzt man daher jetzt $\xi-x_1 = r\cos\varphi$, $\eta-y_1 = r\sin\varphi$ ein, so findet man

$$|X_1| < \iint_K \frac{4M^2}{m^2 r}\,|V(\xi,\eta)|\,d\xi\,d\eta = \int_0^{\varrho''}\int_0^{2\pi}\frac{4M^2}{m^2}\,|V(\xi,\eta)|\,dr\,d\varphi \leqq \frac{8\pi M^2\varrho''}{m^2}\,\mathrm{Max}\,|V(\xi,\eta)|.$$

Der Ausdruck $|X_1|$ verschwindet mit dem Radius $\varrho''$. In analoger Weise läßt sich zeigen, daß auch der Ausdruck $|X_2|$ mit der Größe $\varrho''$ gegen Null konvergiert.

Der Radius $\varrho'' < \bar{\varrho}$ wird so klein angenommen, daß für alle Werte $\delta < \frac{1}{2}\varrho''$

$$(29.) \qquad \left| \frac{1}{\delta} [J_3(x_2, y_1) - J_3(x_1, y_1)] \right| < \varepsilon$$

wird. Nunmehr wird eine Zahl $\delta_0 < \frac{1}{2}\varrho$ so klein gewählt, daß für alle Werte der Größe $\delta$, die kleiner sind als $\delta_0$, die Ungleichheitsbedingung besteht

$$(30.) \qquad \left| \frac{\partial J_4(x_1, y_1)}{\partial x_1} - \frac{J_4(x_2, y_1) - J_4(x_1, y_1)}{\delta} \right| < \varepsilon .$$

Aus den Ungleichheitsbedingungen (26.), (29.) und (30.) folgt, daß für alle Werte der Größe $\delta$, die kleiner sind als $\delta_0$,

$$(31.) \qquad \left| \frac{J_2(x_2, y_1) - J_2(x_1, y_1)}{\delta} - \iint_T \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \log \frac{\beta(\xi - x_1)^2 + \alpha(\eta - y_1)^2}{b(\xi - x_1)^2 + a(\eta - y_1)^2} \right] V(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| < 3\varepsilon$$

wird. Dies bedeutet aber nichts anderes, als daß die partielle Ableitung $\frac{\partial J_2(x_1, y_1)}{\partial x_1}$ existiert und den Wert

$$(32.) \qquad \frac{\partial J_2(x_1, y_1)}{\partial x_1} = \iint_T \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \log \frac{\beta(\xi - x_1)^2 + \alpha(\eta - y_1)^2}{b(\xi - x_1)^2 + a(\eta - y_1)^2} \right] V(\xi, \eta) d\xi d\eta =$$

$$= \iint_T \frac{2(\alpha b - a\beta)(\xi - x_1)(\eta - y_1)^2}{[b(\xi - x_1)^2 + a(\eta - y_1)^2][\beta(\xi - x_1)^2 + \alpha(\eta - y_1)^2]} V(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

hat. Insbesondere ist

$$(33.) \qquad \left. \frac{\partial J_2(x_1, y_1)}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}} = \iint_{T^*} \frac{2(\alpha b - a\beta)(\xi - x)(\eta - y)^2}{[b(\xi - x)^2 + a(\eta - y)^2][\beta(\xi - x)^2 + \alpha(\eta - y)^2]} V(\xi, \eta) d\xi d\eta .$$

## § 3.

Es wird nunmehr zur Betrachtung der partiellen Ableitung $\left. \frac{\partial^2 J_2(x_1, y_1)}{\partial x_1^2} \right|_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}}$ übergegangen. Es sei, wie in § 1, $T^*$ das von dem Kreise vom Halbmesser $\varrho'$ um den Punkt $(x, y)$ als Mittelpunkt begrenzte endliche Gebiet; es sei $(x_1, y_1)$ irgendein Punkt im Innern des Gebietes $T^*$. Es möge ferner $\delta'$ eine positive Zahl kleiner als $\frac{1}{2}\varrho'$ bezeichnen. Man setze

$$x' = x + \delta', \quad y' = y .$$

Es ist

$$\frac{\partial J_2(x_1,y_1)}{\partial x_1} = J_5(x_1,y_1) + J_6(x_1,y_1),$$

$$(34.)\qquad J_5(x_1,y_1) = \iint\limits_{T^*} \frac{2(\alpha b-a\beta)\,(\xi-x_1)\,(\eta-y_1)^2}{[b(\xi-x_1)^2+a(\eta-y_1)^2]\,[\beta(\xi-x_1)^2+\alpha(\eta-y_1)^2]} V(\xi,\eta)d\xi\,d\eta,$$

$$J_6(x_1,y_1) = \iint\limits_{T-T^*} \frac{2(\alpha b-a\beta)^*(\xi-x_1)\,(\eta-y_1)^2}{[b(\xi-x_1)^2+a(\eta-y_1)^2]\,[\beta(\xi-x_1)^2+\alpha(\eta-y_1)^2]} V(\xi,\eta)d\xi\,d\eta.$$

Offenbar ist

$$\frac{\partial J_6(x_1,y_1)}{\partial x_1}\Big|_{\substack{x_1=x\\y_1=y}} = \iint\limits_{T-T^*}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\,\frac{2(\alpha b-a\beta)\,(\xi-x_1)\,(\eta-y_1)^2}{[b(\xi-x_1)^2+a(\eta-y_1)^2]\,[\beta(\xi-x_1)^2+\alpha(\eta-y_1)^2]}\right]_{\substack{x_1=x\\y_1=y}} V(\xi,\eta)d\xi\,d\eta.$$

Es wird jetzt gezeigt, daß das Integral

$$J_0 = \iint\limits_{T^*}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\,\frac{2(\alpha b-a\beta)\,(\xi-x_1)\,(\eta-y_1)^2}{[b(\xi-x_1)^2+a(\eta-y_1)^2]\,[\beta(\xi-x_1)^2+\alpha(\eta-y_1)^2]}\right]_{\substack{x_1=x\\y_1=y}} V(\xi,\eta)d\xi\,d\eta =$$

$$= \iint\limits_{T^*} 2(\alpha b-a\beta)\,(\eta-y)^2\,\frac{3b\beta(\xi-x)^4+(\alpha b+a\beta)\,(\xi-x)^2\,(\eta-y)^2-a\alpha(\eta-y)^4}{[b(\xi-x)^2+a(\eta-y)^2]^2\,[\beta(\xi-x)^2+\alpha(\eta-y)^2]^2} V(\xi,\eta)d\xi\,d\eta$$

mit verschwindendem Radius $\varrho'$ gegen Null konvergiert.

Die Funktionen $\alpha = a(\xi,\eta)$ und $\beta = b(\xi,\eta)$ haben nach Voraussetzung stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Es sei zur Vereinfachung der größte Wert des absoluten Betrages der partiellen Ableitungen $\frac{\partial a}{\partial \xi}, \frac{\partial a}{\partial \eta}, \frac{\partial b}{\partial \xi}, \frac{\partial b}{\partial \eta}$ im Gebiete $T$ mit $A$ bezeichnet. Man überzeugt sich leicht, daß

$$(35.)\qquad |\alpha b-a\beta| \leqq 2AM[|\xi-x|+|\eta-y|].$$

Führt man jetzt durch die Gleichungen

$$\xi-x = r\cos\varphi, \quad \eta-y = r\sin\varphi$$

Polarkoordinaten ein, so findet man nach einer einfachen Rechnung die Ungleichheitsbedingung

$$|J_0| < \frac{96\pi\varrho' AM^3}{m^4}\,\mathrm{Max}\,|V(\xi,\eta)|.$$

Das Integral $J_0$ konvergiert also in der Tat mit der Größe $\varrho'$ zugleich gegen Null. Man kann somit eine Größe $\bar{\varrho}'$ so klein wählen, daß für alle Werte $\varrho' < \bar{\varrho}'$

$$(36.)\qquad \left| \frac{\partial J_6(x_1,y_1)}{\partial x_1}\Big|_{\substack{x_1=x\\y_1=y}} - J^{(1)} \right| < \varepsilon\,,$$

$$J^{(1)} = \iint_T \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{2(ab-a\beta)(\xi-x_1)(\eta-y_1)^2}{[b(\xi-x_1)^2+a(\eta-y_1)^2][\beta(\xi-x_1)^2+a(\eta-y_1)^2]} \right]_{\substack{x_1=x\\y_1=y}} V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

wird.

Es wird jetzt gezeigt, daß der Differenzenquotient

$$(37.)\qquad \frac{1}{\delta'}[J_6(x',y)-J_6(x,y)]$$

gleichzeitig mit $\varrho'$ unendlich klein wird, welchen Wert die Differenz $x'-x=\delta'<\frac{1}{2}\varrho'$ auch haben mag.

Beachtet man, daß

$$(\xi-x)^3-(\xi-x')^3 = 3(x'-x)[\xi-(x'-\Theta\delta')]^2\,,\quad 0<\Theta<1$$

ist, so findet man durch direkte Ausrechnung für den Ausdruck (37.) den Wert

$$\iint_{T^*} 2(ab-a\beta)(\eta-y)^2\frac{\Phi}{\Psi}V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \iint_{T_1^*} + \iint_{T_2^*} = X_3 + X_4\,,$$

$$\Phi = 3\beta b(\xi-x)(\xi-x')[\xi-(x'-\Theta\delta')]^2 + (ab+a\beta)(\xi-x)(\xi-x')(\eta-y)^2 - a\alpha(\eta-y)^4\,,$$
$$\Psi = W(\alpha,\beta;x',y)\,W(\alpha,\beta;x,y)\,W(a,b;x',y)\,W(a,b;x,y)\,.$$

$T_1^*$ und $T_2^*$ sind die beiden Gebiete, in welche das Gebiet $T^*$ durch die Gerade geteilt wird, welche auf der Verbindungsgeraden der Punkte $(x,y)$ und $(x',y)$ in ihrer Mitte senkrecht steht. Die Abszissen aller Punkte des Gebietes $T_1^*$ sind $\leqq \frac{1}{2}(x+x')$, diejenigen der Punkte des Gebietes $T_2^*$ dagegen $\geqq \frac{1}{2}(x+x')$.

Es ist nun

$$|(\xi-x)(\eta-y)| \leqq \tfrac{1}{2}[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]\,,\quad |(\xi-x')(\eta-y)| \leqq \tfrac{1}{2}[(\xi-x')^2+(\eta-y)^2]\,,$$
$$|\xi-(x'-\Theta\delta')| < \begin{cases} |\xi-x'| \text{ in } T_1^*\,,\\ |\xi-x| \text{ in } T_2^*\,,\end{cases}$$
$$|\alpha b-a\beta| < 2AM(|\xi-x|+|\eta-y|)\,,$$

somit

$$|X_3| < 4AM^3 \iint_{T_1^*} \frac{[\,|\xi-x|+|\eta-y|\,]\,|\eta-y|}{m^4[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^2}\left\{\frac{3\,|\xi-x|\,|\xi-x'|^3\,|\eta-y|}{[(\xi-x')^2+(\eta-y)^2]^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{2\,|\xi-x'|\,|\eta-y|^3\,|\xi-x|}{[(\xi-x')^2+(\eta-y)^2]^2} + \frac{|\eta-y|^5}{[(\xi-x')^2+(\eta-y)^2]^2}\right\}|V(\xi,\eta)|\,d\xi\,d\eta$$
$$< \frac{4AM^3}{m^4}\iint_{T^*} \frac{|\eta-y|\,[\,|\xi-x|+|\eta-y|\,]}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^2}\left\{\frac{3}{2}|\xi-x|+|\xi-x|+|\eta-y|\right\}|V(\xi,\eta)|\,d\xi\,d\eta\,.$$

Setzt man jetzt

$$\xi - x = r\cos\varphi, \quad \eta - y = r\sin\varphi$$

ein, so findet man

$$|X_3| < \frac{4AM^3}{m^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varrho'} \frac{r^3\,|\sin\varphi|\,[\,|\cos\varphi|+|\sin\varphi|\,]}{r^4}\left[\frac{5}{2}|\cos\varphi|+|\sin\varphi|\right]|V(\xi,\eta)|\,r\,dr\,d\varphi <$$

$$< \frac{56\pi\varrho' AM^3}{m^4}\,\mathrm{Max}\,|V(\xi,\eta)|\,.$$

Der Ausdruck $|X_3|$ wird mit dem Halbmesser $\varrho'$ zugleich unendlich klein. In ähnlicher Weise überzeugt man sich, daß auch der Ausdruck $|X_4|$ zugleich mit der Größe $\varrho'$ verschwindet.

Man nehme den Radius $\varrho' < \bar{\varrho}'$ so klein an, daß für alle Werte der Größe $\delta' < \frac{1}{2}\varrho'$ der Differenzenquotient

$$\frac{1}{\delta'}\left|J_5(x',y) - J_5(x,y)\right| < \varepsilon \tag{38.}$$

wird. Nunmehr wird eine Größe $\delta'' < \frac{1}{2}\varrho'$ so klein gewählt, daß für alle Werte der Größe $\delta'$, die kleiner sind als $\delta''$, die Ungleichheitsbedingung besteht

$$\left|\frac{\partial J_6(x_1,y_1)}{\partial x_1}\Big|_{\substack{x_1=x\\y_1=y}} - \frac{J_6(x',y)-J_6(x,y)}{\delta'}\right| < \varepsilon\,. \tag{39.}$$

Aus den Ungleichheitsbedingungen (36.), (38.) und (39.) folgt, daß für alle Werte der Größe $\delta'$, die kleiner sind als $\delta''$

$$\left|\frac{1}{\delta'}\left\{\frac{\partial J_2(x_1,y_1)}{\partial x_1}\Big|_{\substack{x_1=x+\delta'\\y_1=y}} - \frac{\partial J_2(x_1,y_1)}{\partial x_1}\Big|_{\substack{x_1=x\\y_1=y}}\right\} - J^{(2)}\right| < 3\varepsilon, \tag{40.}$$

$$J^{(2)} = \int_T\int\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\frac{2(ab-\alpha\beta)(\xi-x_1)(\eta-y_1)^2}{[b(\xi-x_1)^2+a(\eta-y_1)^2][\beta(\xi-x_1)^2+\alpha(\eta-y_1)^2]}\right]_{\substack{x_1=x\\y_1=y}} V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

wird. Dies bedeutet aber nichts anderes, als daß die partielle Ableitung $\frac{\partial^2 J_2(x_1,y_1)}{\partial x_1^2}\Big|_{\substack{x_1=x\\y_1=y}}$ existiert und den Wert

$$\int_T\int\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\frac{2(ab-\alpha\beta)(\xi-x_1)(\eta-y_1)^2}{[b(\xi-x_1)^2+a(\eta-y_1)^2][\beta(\xi-x_1)^2+\alpha(\eta-y_1)^2]}\right]_{\substack{x_1=x\\y_1=y}} V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \int_T\int\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\log\frac{\beta(\xi-x_1)^2+\alpha(\eta-y_1)^2}{b(\xi-x_1)^2+a(\eta-y_1)^2}\right]_{\substack{x_1=x\\y_1=y}} V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \tag{41.}$$

hat. Hierbei ist zu bemerken: Durch die obigen Darlegungen ist nur bewiesen, daß die partielle Ableitung $\frac{\partial^2 J_2(x_1, y_1)}{\partial x_1^2}$ in dem Punkte $x_1 = x$, $y_1 = y$ existiert. Für den Ausdruck $\left.\frac{\partial^2 J_2(x_1, y_1)}{\partial x_1^2}\right|_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}}$ darf man nicht einfacher $\frac{\partial^2 J_2(x, y)}{\partial x^2}$ setzen, weil bei der Bildung des zuletzt genannten Differentialquotienten die Größen $a$ und $b$ ebenfalls würden verändert werden müssen, während sie tatsächlich in der ganzen bisherigen Untersuchung als Konstante anzusehen waren.

## § 4.

Das Integral

$$\iint_T \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \log\left\{\beta(\xi - x_1)^2 + \alpha(\eta - y_1)^2\right\}\right] V(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = -\iint_T \frac{2\beta(\xi - x_1)}{\beta(\xi - x_1)^2 + \alpha(\eta - y_1)^2} V(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

hat eine bestimmte Bedeutung. Man kann daher setzen

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_2(x_1, y_1)}{\partial x_1} = \iint_T \Bigg[&\frac{\partial}{\partial x_1} \log\left\{\beta(\xi - x_1)^2 + \alpha(\eta - y_1)^2\right\} - \\ &- \frac{\partial}{\partial x_1} \log\left\{b(\xi - x_1)^2 + a(\eta - y_1)^2\right\}\Bigg] V(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \\ = \iint_T \Bigg[&\frac{\partial}{\partial x_1} \log\left\{\beta(\xi - x_1)^2 + \alpha(\eta - y_1)^2\right\}\Bigg] V(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta - \\ - \iint_T \Bigg[&\frac{\partial}{\partial x_1} \log\left\{b(\xi - x_1)^2 + a(\eta - y_1)^2\right\}\Bigg] V(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.\end{aligned}$$

Hieraus und aus den Formeln (14.), (22.) und (32.) folgt

$$(42.)\quad \begin{aligned}\frac{\partial J(x_1, y_1)}{\partial x_1} &= \frac{\partial J_1(x_1, y_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial J_2(x_1, y_1)}{\partial x_1} = \\ &= \iint_T \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \log\left\{\beta(\xi - x_1)^2 + \alpha(\eta - y_1)^2\right\}\right] V(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\end{aligned}$$

und analog

$$(43.)\quad \frac{\partial J(x_1, y_1)}{\partial y_1} = \iint_T \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \log\left\{\beta(\xi - x_1)^2 + \alpha(\eta - y_1)^2\right\}\right] V(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Man bilde jetzt den Ausdruck

$$(44.)\quad \begin{aligned}P(x, y) &= a\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 J}{\partial y^2} = \\ &= a\left[\frac{\partial^2 J_1}{\partial x_1^2}\right]_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}} + b\left[\frac{\partial^2 J_1}{\partial y_1^2}\right]_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}} + a\left[\frac{\partial^2 J_2}{\partial x_1^2}\right]_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}} + b\left[\frac{\partial^2 J_2}{\partial y_1^2}\right]_{\substack{x_1 = x \\ y_1 = y}}.\end{aligned}$$

Aus den Formeln (23.) und (41.) folgt die weitere Beziehung

$$(45.)\quad P(x,y) = 4\pi\sqrt{ab}\,V(x,y) + \iint_T \left\{ a\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\log\frac{\beta(\xi-x_1)^2+\alpha(\eta-y_1)^2}{b(\xi-x_1)^2+a(\eta-y_1)^2}\right]_{\substack{x_1=x\\y_1=y}} + \right.$$

$$\left. + b\left[\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\log\frac{\beta(\xi-x_1)^2+\alpha(\eta-y_1)^2}{b(\xi-x_1)^2+a(\eta-y_1)^2}\right]_{\substack{x_1=x\\y_1=y}} \right\} V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta =$$

$$= 4\pi\sqrt{ab}\,V(x,y) + \iint_T (aA' + bB' - aA'' - bB'')\,V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

$$A' = \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\log\left\{\beta(\xi-x_1)^2+\alpha(\eta-y_1)^2\right\}\right]_{\substack{x_1=x\\y_1=y}},$$

$$B' = \left[\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\log\left\{\beta(\xi-x_1)^2+\alpha(\eta-y_1)^2\right\}\right]_{\substack{x_1=x\\y_1=y}},$$

$$A'' = \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\log\left\{b(\xi-x_1)^2+a(\eta-y_1)^2\right\}\right]_{\substack{x_1=x\\y_1=y}},$$

$$B'' = \left[\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\log\left\{b(\xi-x_1)^2+a(\eta-y_1)^2\right\}\right]_{\substack{x_1=x\\y_1=y}}.$$

Diese Formel läßt sich wesentlich vereinfachen. Man bemerkt zunächst, daß das Integral

$$\iint_T (aA' + bB')\,V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$= \iint_T 2(a\beta - ab)\frac{\alpha(\eta-y_1)^2 - \beta(\xi-x_1)^2}{[\beta(\xi-x_1)^2+\alpha(\eta-y_1)^2]^2}\,V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

eine bestimmte Bedeutung hat. Man überzeugt sich ferner durch direkte Ausrechnung, daß

$$(46.)\qquad \iint_T (aA'' + bB'')\,V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = 0.$$

Aus den Formeln (45.) und (46.) ergibt sich nunmehr die Beziehung

$$(47.)\quad P(x,y) = 4\pi\sqrt{ab}\,V(x,y) + \iint_T (aA' + bB')\,V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

oder, da eine Verwechslung nicht mehr zu befürchten ist,

$$(48.)\qquad P(x,y) = a\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 J}{\partial y^2} =$$

$$= 4\pi\sqrt{ab}\,V(x,y) + \iint_T \left[\left(a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\log\left\{\beta(\xi-x)^2+\alpha(\eta-y)^2\right\}\right] V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Die in der Formel (12.) auftretende Funktion $K(x, y; \xi, \eta)$ hat somit den Wert

$$2(a\beta - \alpha b)\,\frac{\alpha(\eta-y)^2 - \beta(\xi-x)^2}{[\beta(\xi-x)^2 + \alpha(\eta-y)^2]^2}.$$

Diese Funktion verhält sich stetig, außer wenn $x = \xi$, $y = \eta$ ist. Das Produkt

$$[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2]^{\frac{1}{2}} K(x, y; \xi, \eta)$$

ist der Ungleichheitsbedingung (35.) zufolge dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$4AM[|\xi-x| + |\eta-y|]\,\frac{M}{m^2[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2]^{\frac{1}{2}}} < \frac{4AM^2\sqrt{2}}{m^2}$$

und hat, als Funktion von $\xi, \eta$ betrachtet, in dem Punkte $(x, y)$ eine Unbestimmtheitsstelle.

Es bleibt nun noch nachzuweisen, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial J(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial J(x,y)}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 J(x,y)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 J(x,y)}{\partial y^2}$, deren Existenz jetzt feststeht, stetige Funktionen ihrer beiden Argumente sind. Dies soll der Gegenstand des folgenden Paragraphen sein.

## § 5.

Was zunächst die partiellen Ableitungen $\frac{\partial J}{\partial x}$ und $\frac{\partial J}{\partial y}$ anbetrifft, so wird in dem sechsten Paragraphen dieses Kapitels bewiesen werden, daß diese Funktionen für alle Werte der Variablen $x$ und $y$ im Innern und auf dem Rande des Gebietes $T$ der Hölderschen Bedingung genügen, d. h. daß die Ungleichheitsbedingungen bestehen

$$(49.)\quad \left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial J(x+\Delta x, y+\Delta y)}{\partial x} - \dfrac{\partial J(x,y)}{\partial x}\right| \\ \left|\dfrac{\partial J(x+\Delta x, y+\Delta y)}{\partial y} - \dfrac{\partial J(x,y)}{\partial y}\right| \end{array}\right\} < A_2[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{\frac{\lambda}{2}},\ 0 < \lambda < 1.$$

Hierin bezeichnet $A_2$ eine gewisse positive Größe. Aus den Ungleichheitsbedingungen (49.) ergibt sich sofort, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial J}{\partial x}$ und $\frac{\partial J}{\partial y}$ sich stetig verhalten.

Es sei $(x, y)$ ein Punkt im Innern des Gebietes $T$ und $V(\xi, \eta)$ eine der Hölderschen Bedingung genügende Funktion.

Es sei jetzt das logarithmische Potential

$$(50.) \qquad J^{(3)}(x,y) = \iint_T \log\left\{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\right\}\cdot V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

vorgelegt. Nach einer bekannten Formel[1] ist

$$\frac{\partial^2 J^{(3)}(x,y)}{\partial x^2} = \iint_T [V(\xi,\eta)-V(x,y)]\,\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\log\left\{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\right\}d\xi\,d\eta + \\ + V(x,y)\int_S \frac{\partial}{\partial\sigma}\log\left\{(\sigma-x)^2+(\tau-y)^2\right\}d\tau\,.$$

Hierin bezeichnet $(\sigma,\tau)$ einen Punkt auf dem Rande des Gebietes $T$. Das einfache Integral ist über die Gesamtbegrenzung $S$ des Gebietes $T$ zu erstrecken.

Es möge jetzt diese Formel auf das Integral

$$J_1(x_1,y_1) = \frac{1}{\sqrt{ab}}\iint_{\bar T}\log\left\{(\xi-\bar x_1)^2+(\bar\eta-\bar y_1)^2\right\}\cdot\bar V(\bar\xi,\bar\eta)\,d\xi\,d\bar\eta$$

angewandt werden. Für $S$, $T$, $x$, $y$, $\xi$, $\eta$, $\sigma$, $\tau$, $V(\xi,\eta)$ treten im vorliegenden Falle $\bar S$, $\bar T$, $\bar x_1$, $\bar y_1$, $\bar\xi$, $\bar\eta$, $\bar\sigma$, $\bar\tau$, $\bar V(\bar\xi,\bar\eta)$ ein. $\bar S$ bezeichnet die Gesamtbegrenzung des Gebietes $\bar T$. Man erhält

$$(51.) \quad \frac{\partial^2 J_1(x_1,y_1)}{\partial\bar x_1^2} = \frac{2}{\sqrt{ab}}\iint_{\bar T}[\bar V(\bar\xi,\bar\eta)-\bar V(\bar x_1,\bar y_1)]\,\frac{(\bar\eta-\bar y_1)^2-(\bar\xi-\bar x_1)^2}{[(\bar\xi-\bar x_1)^2+(\bar\eta-\bar y_1)^2]^2}\,d\bar\xi\,d\bar\eta + \\ + \frac{2\,\bar V(\bar x_1,\bar y_1)}{\sqrt{ab}}\int_{\bar S}\frac{\bar\sigma-\bar x_1}{(\bar\sigma-\bar x_1)^2+(\bar\tau-\bar y_1)^2}\,d\bar\tau\,.$$

Beachtet man die Beziehungen (21.), so findet man die Formel

$$\frac{\partial^2 J_1(x_1,y_1)}{\partial x_1^2} = 2b\iint_T[V(\xi,\eta)-V(x_1,y_1)]\,\frac{a(\eta-y_1)^2-b(\xi-x_1)^2}{[b(\xi-x_1)^2+a(\eta-y_1)^2]^2}\,d\xi\,d\eta + \\ + 2bV(x_1,y_1)\int_S\frac{\sigma-x_1}{b(\sigma-x_1)^2+a(\tau-y_1)^2}\,d\tau\,.$$

[1] Vgl. U. Dini, Sur la méthode des approximations successives pour les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre (Acta Mathematica, Bd. XXV [1902], S. 185—230, insbesondere S. 209).

Für die besonderen Werte $x_1 = x$, $y_1 = y$ erhält man

$$(52.)\quad \frac{\partial^2 J_1(x_1,y_1)}{\partial x_1^2}\Big|_{\substack{x_1=x\\y_1=y}} = 2b\iint_T [V(\xi,\eta)-V(x,y)]\,\frac{a(\eta-y)^2-b(\xi-x)^2}{[b(\xi-x)^2+a(\eta-y)^2]^2}\,d\xi\,d\eta$$
$$+2bV(x,y)\int_S \frac{\sigma-x}{b(\sigma-x)^2+a(\tau-y)^2}\,d\tau\,.$$

Aus den Gleichungen (20.), (41.) und (52.) folgt die endgültige Formel

$$(53.)\quad \frac{\partial^2 J(x,y)}{\partial x^2} = 2b\iint_T [V(\xi,\eta)-V(x,y)]\,\frac{a(\eta-y)^2-b(\xi-x)^2}{[b(\xi-x)^2+a(\eta-y)^2]^2}\,d\xi\,d\eta +$$
$$+\iint_T \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\log\frac{\beta(\xi-x_1)^2+\alpha(\eta-y_1)^2}{b(\xi-x_1)^2+a(\eta-y_1)^2}\right]_{\substack{x_1=x\\y_1=y}} V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$
$$+2bV(x,y)\int_S \frac{\sigma-x}{b(\sigma-x)^2+a(\tau-y)^2}\,d\tau\,.$$

Das einfache Integral auf der rechten Seite dieser Formel ist im Innern des Gebietes $T$ augenscheinlich eine stetige Funktion der beiden Veränderlichen $x$ und $y$. In dem zweiten Doppelintegral ist die zu integrierende Funktion, als Funktion der Veränderlichen $x, y; \xi, \eta$ betrachtet, überall, außer wenn $x = \xi$, $y = \eta$, stetig. Das Produkt

$$(54.)\quad [(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\log\frac{\beta(\xi-x_1)^2+\alpha(\eta-y_1)^2}{b(\xi-x_1)^2+a(\eta-y_1)^2}\right]_{\substack{x_1=x\\y_1=y}}$$

übersteigt dem absoluten Betrage nach eine angebbare Größe nicht und hat, als Funktion von $\xi, \eta$ betrachtet, im Punkte $(x, y)$ eine Unbestimmtheitsstelle. Nach der Voraussetzung ist

$$|V(\xi,\eta)-V(x,y)| < A_3[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^{\frac{\lambda}{2}},\quad 0<\lambda<1\,,$$

worin $A_3$ eine gewisse positive Zahlgröße bezeichnet. Daher ist auch das Produkt

$$(55.)\quad [(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^{1-\frac{\lambda}{2}}[V(\xi,\eta)-V(x,y)]\,\frac{a(\eta-y)^2-b(\xi-x)^2}{[b(\xi-x)^2+a(\eta-y)^2]^2}$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als eine gewisse positive Zahl und ist, als Funktion von $\xi, \eta$ betrachtet, höchstens im Punkte $(x, y)$ unstetig. Nunmehr läßt sich nach der in der Theorie der uneigentlichen Integrale üblichen Schlußweise zeigen, daß die beiden in der Formel (53.) auftretenden Doppelintegrale stetige Funktionen von $x$ und $y$ darstellen.

Hiermit ist nunmehr bewiesen, daß die partielle Ableitung $\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}$ sich im Innern des Gebietes $T$ stetig verhält. In ähnlicher Weise kann gezeigt werden, daß auch die partielle Ableitung $\frac{\partial^2 J}{\partial y^2}$ eine stetige Funktion ist.

## § 6.

Für die weiteren Betrachtungen dieser Abhandlung erweist sich der folgende Hilfssatz als nützlich:

Es mögen $(x, y)$ und $(x_1, y_1)$ zwei verschiedene Punkte des Gebietes $T$ bezeichnen. Die Integrale

$$(56.)\qquad \begin{aligned} J_1(x, y; x_1, y_1) &= \iint_T \frac{\log\{(\xi-x_1)^2+(\eta-y_1)^2\}}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^{\frac{1}{2}}}\, d\xi\, d\eta, \\ J_2(x, y; x_1, y_1) &= \iint_T [(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^{-\frac{1}{2}}\, [(\xi-x_1)^2+(\eta-y_1)^2]^{-\frac{1}{2}}\, d\xi\, d\eta \end{aligned}$$

genügen den Ungleichheitsbedingungen

$$(57.)\qquad |J_1(x, y; x_1, y_1)| < M_0,$$

$$(58.)\qquad |J_2(x, y; x_1, y_1)| < M' |\log\{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2\}| + N'.$$

$M_0$, $M'$ und $N'$ bezeichnen gewisse positive Größen.

Dieser Hilfssatz wird als bekannt vorausgesetzt[1].

Es wird nunmehr der folgende Satz bewiesen:

Es sei $W(\xi, \eta)$ eine beliebige reelle, eindeutige und stetige Funktion ihrer beiden Argumente. Die Integrale

$$(59.)\qquad K(x, y) = \iint_T \frac{\partial}{\partial x} \log\{\beta(\xi-x)^2+\alpha(\eta-y)^2\} \cdot W(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

und

$$(60.)\qquad \begin{aligned} L(x, y) &= \iint_T \left(a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\log\{\beta(\xi-x)^2+\alpha(\eta-y)^2\}\right) W(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \\ &= 2\iint_T (a\beta-\alpha b)\frac{\alpha(\eta-y)^2-\beta(\xi-x)^2}{[\beta(\xi-x)^2+\alpha(\eta-y)^2]^2}\, W(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \end{aligned}$$

genügen der Hölderschen Bedingung.

---

[1] Vgl. J. Plemelj, Über lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie, Monatshefte für Mathematik und Physik, 1904, S. 337—411, insbesondere S. 364—365.

Beweis.

Es ist

$$\frac{K(x_1,y)-K(x,y)}{x_1-x} = \iint_T \frac{2\beta\left[\alpha(\eta-y)^2-\beta(\xi-x)(\xi-x_1)\right]W(\xi,\eta)}{W(\alpha,\beta;x_1,y)\,W(\alpha,\beta;x,y)}\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \iint_T \frac{W(x,y;x_1,y;\xi,\eta)}{[(\xi-x_1)^2+(\eta-y)^2]^{\frac{1}{2}}\,[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^{\frac{1}{2}}}\,d\xi\,d\eta .$$

Der Ausdruck $W(x,y;x_1,y;\xi,\eta)$ ist, als Funktion der Variablen $\xi,\eta$ betrachtet, für alle Werte der Variablenpaare $(x,y)$ und $(x_1,y)$ im Gebiete $T$ beschränkt. Die Funktion $W(x,y;x_1,y;\xi,\eta)$ ist überall, mit Ausnahme der Punkte $(x,y)$ und $(x_1,y)$, stetig. In den ausgeschlossenen Punkten hat sie Unbestimmtheitsstellen. Dem soeben betrachteten Hilfssatze zufolge ist

$$\left|\frac{K(x_1,y)-K(x,y)}{x_1-x}\right| < M_1\left|\log|x_1-x|\right| + N_1 ,$$

worin $M_1$ und $N_1$ gewisse positive Größen bezeichnen. Hieraus folgt weiter

$$|K(x_1,y)-K(x,y)| < M_1|x_1-x|\left|\log|x_1-x|\right| + N_1|x_1-x| .$$

Aus der bekannten Ungleichheitsbedingung

$$|\ln z| < \frac{1}{\mu}z^{-\mu}, \quad \mu>0 \text{ für } 0<z\leqq 1$$

folgt, wenn man der Einfachheit halber $\mu=\frac{1}{2}$ setzt,

$$\left|\log|x_1-x|\right| < 2|x_1-x|^{-\frac{1}{2}} \text{ für } |x_1-x|\leqq 1 ,$$

somit

$$(61.)\qquad |K(x_1,y)-K(x,y)| < 2M_1|x_1-x|^{\frac{1}{2}} + N_1|x_1-x| \leqq (2M_1+N_1)|x_1-x|^{\frac{1}{2}} .$$

In ähnlicher Weise kann man zeigen, daß für alle Werte der Variablenpaare $(x,y_1)$ und $(x,y)$ im Innern und auf dem Rande des Gebietes $T$, sofern $|y_1-y|\leqq 1$ ist, die Ungleichheitsbedingung

$$(62.)\qquad |K(x,y_1)-K(x,y)| < M_2|y_1-y|^{\frac{1}{2}}$$

besteht. Hierin bezeichnet $M_2$ eine gewisse positive Größe.

Es sei $M_3$ die größere der beiden Zahlen $2M_1+N_1$ und $M_2$. Aus den Ungleichheitsbedingungen (61.) und (62.) folgt für alle dem absoluten Be-

trage nach hinreichend kleinen Werte der Differenzen $(x_1-x)$ und $(y_1-y)$ die Ungleichheitsbedingung

$$(63.)\quad |K(x_1,y_1)-K(x,y)| \leqq |K(x_1,y_1)-K(x_1,y)| + |K(x_1,y)-K(x,y)| < \\ < M_3\left[|x_1-x|^{\frac{1}{2}}+|y_1-y|^{\frac{1}{2}}\right] < M_3\sqrt[4]{8}\left\{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2\right\}^{\frac{1}{4}}.$$

Es sei jetzt der Ausdruck

$$L(x,y) = L_1(x,y)-L_2(x,y),$$

$$L_1(x,y) = 2\iint_T (a\beta-\alpha b)\frac{\alpha(\eta-y)^2 W(\xi,\eta)}{[\beta(\xi-x)^2+\alpha(\eta-y)^2]^2}\,d\xi\,d\eta,$$

$$L_2(x,y) = 2\iint_T (a\beta-\alpha b)\frac{\beta(\xi-x)^2 W(\xi,\eta)}{[\beta(\xi-x)^2+\alpha(\eta-y)^2]^2}\,d\xi\,d\eta$$

vorgelegt.

Man setze zur Abkürzung

$$\begin{cases} u = u(x,y;\xi,\eta) = v = v(x,y;\xi,\eta) = \dfrac{\eta-y}{\beta(\xi-x)^2+\alpha(\eta-y)^2}, \\ w = w(x,y;\xi,\eta) = 2\alpha(a\beta-\alpha b)W(\xi,\eta), \\ a' = a(x_1,y), \quad b' = b(x_1,y), \quad u' = u(x_1,y;\xi,\eta), \quad v' = v(x_1,y;\xi,\eta), \\ w' = w(x_1,y;\xi,\eta), \quad \Delta u = u'-u, \quad \Delta v = v'-v, \qquad \Delta w = w'-w. \end{cases}$$

Alsdann ist

$$(64.)\quad L_1(x_1,y)-L_1(x,y) = \iint_T (u'v'w'-uvw)\,d\xi\,d\eta = \\ = \iint_T vw\,\Delta u\,d\xi\,d\eta + \iint_T u'v\,\Delta w\,d\xi\,d\eta + \iint_T u'w'\Delta v\,d\xi\,d\eta = \\ = L_3+L_4+L_5.$$

Man findet nach einer einfachen Umrechnung die Formel

$$L_3 = (x_1-x)\iint_T \frac{W_1(x,y;x_1,y;\xi,\eta)}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^{\frac{1}{2}}[(\xi-x_1)^2+(\eta-y)^2]^{\frac{1}{2}}}\,d\xi\,d\eta,$$

$$W_1(x,y;x_1,y;\xi,\eta) = \frac{2\alpha\beta(\eta-y)(a\beta-\alpha b)W(\xi,\eta)}{\beta(\xi-x)^2+\alpha(\eta-y)^2}(W_1'+W_1''),$$

$$W_1' = \frac{(\xi-x)[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^{\frac{1}{2}}}{\beta(\xi-x)^2+\alpha(\eta-y)^2}\cdot\frac{(\eta-y)[(\xi-x_1)^2+(\eta-y)^2]^{\frac{1}{2}}}{\beta(\xi-x_1)^2+\alpha(\eta-y)^2},$$

$$W_1'' = \frac{(\eta-y)[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^{\frac{1}{2}}}{\beta(\xi-x)^2+\alpha(\eta-y)^2}\cdot\frac{(\xi-x_1)[(\xi-x_1)^2+(\eta-y)^2]^{\frac{1}{2}}}{\beta(\xi-x_1)^2+\alpha(\eta-y)^2}.$$

Beachtet man die Beziehung (35.), so überzeugt man sich ohne Mühe, daß der Ausdruck $W_1(x, y; x_1, y; \xi, \eta)$ dem absoluten Betrage nach einen festen Wert nicht übersteigt und, als Funktion von $\xi$ und $\eta$ betrachtet, sich überall im Gebiete $T$, die Punkte $(x, y)$ und $(x_1, y)$ ausgenommen, stetig verhält. In den ausgeschlossenen Punkten hat die Funktion $W_1(x, y; x_1, y; \xi, \eta)$ Unbestimmtheitsstellen.

Nunmehr ergibt sich, wie vorhin, für alle Werte der Variablenpaare $(x, y)$ und $(x_1, y)$ im Innern und auf dem Rande des Gebietes $T$, die der Ungleichheitsbedingung $|x_1 - x| \leqq 1$ genügen, die Beziehung

$$|L_3| < M_4 |x_1 - x|^{\frac{1}{2}}. \tag{65.}$$

$M_4$ bezeichnet ebenso, wie die später auftretenden Größen $M_5, M_6, \cdots$, eine gewisse positive Zahl.

Es ist nun weiter

$$L_4 = (x_1 - x) \iint_T \frac{W_2(x, y; x_1, y; \xi, \eta)}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^{\frac{1}{2}} [(\xi - x_1)^2 + (\eta - y)^2]^{\frac{1}{2}}} d\xi\, d\eta,$$

$$W_2(x, y; x_1, y; \xi, \eta) = 2\alpha W(\xi, \eta) \left(\beta \frac{a' - a}{x_1 - x} - \alpha \frac{b' - b}{x_1 - x}\right) W_2',$$

$$W_2' = \frac{(\eta - y)[(\xi - x_1)^2 + (\eta - y)^2]^{\frac{1}{2}}}{\beta(\xi - x_1)^2 + \alpha(\eta - y)^2} \cdot \frac{(\eta - y)[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^{\frac{1}{2}}}{\beta(\xi - x)^2 + \alpha(\eta - y)^2}.$$

Beachtet man, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial a}{\partial x}$ und $\frac{\partial b}{\partial x}$ stetige Funktionen ihrer beiden Argumente sind, so überzeugt man sich ohne Mühe, daß die Funktion $W_2(x, y; x_1, y; \xi, \eta)$ sich ganz wie die Funktion $W_1(x, y; x_1, y; \xi, \eta)$ verhält.

Man findet daher, wie oben, eine Ungleichheitsbedingung

$$|L_4| < M_5 |x_1 - x|^{\frac{1}{2}}, \quad |x_1 - x| \leqq 1. \tag{66.}$$

Endlich ist

$$L_5 = (x_1 - x) \iint_T \frac{W_3(x, y; x_1, y; \xi, \eta)}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^{\frac{1}{2}} [(\xi - x_1)^2 + (\eta - y)^2]^{\frac{1}{2}}} d\xi\, d\eta,$$

$$W_3(x, y; x_1, y; \xi, \eta) = \frac{2\alpha\beta(\eta - y)(a'\beta - \alpha b') W(\xi, \eta)}{\beta(\xi - x_1)^2 + \alpha(\eta - y)^2} (W_1' + W_1'').$$

Die Funktion $W_3(x, y; x_1, y; \xi, \eta)$ verhält sich ganz wie die Funktion $W_1(x, y; x_1, y; \xi, \eta)$. Man findet daher wieder eine Ungleichheitsbedingung

$$|L_5| < M_6 |x_1 - x|^{\frac{1}{2}}, \qquad |x_1 - x| \leqq 1. \tag{67.}$$

Aus den Relationen (64.) bis (67.) folgt eine Ungleichheitsbedingung

$$(68.) \qquad |L_1(x_1, y) - L_1(x, y)| < M_7 |x_1 - x|^{\frac{1}{2}}, \qquad |x_1 - x| \leqq 1.$$

In analoger Weise überzeugt man sich von dem Erfülltsein einer Ungleichheitsbedingung

$$(69.) \qquad |L_2(x_1, y) - L_2(x, y)| < M_8 |x_1 - x|^{\frac{1}{2}}, \qquad |x_1 - x| \leqq 1.$$

Aus den Beziehungen (68.) und (69.) ergibt sich eine weitere Ungleichheitsbedingung

$$(70.) \qquad |L(x_1, y) - L(x, y)| < M_9 |x_1 - x|^{\frac{1}{2}}, \qquad |x_1 - x| \leqq 1.$$

In analoger Weise läßt sich zeigen, daß für alle Werte $|y_1 - y| \leqq 1$

$$(71.) \qquad |L(x, y_1) - L(x, y)| < M_{10} |y_1 - y|^{\frac{1}{2}}.$$

Aus den Formeln (70.) und (71.) ergibt sich für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Werte der Differenzen $(x_1 - x)$ und $(y_1 - y)$ eine Ungleichheitsbedingung

$$(72.) \qquad |L(x_1, y_1) - L(x, y)| < M_{11} [|x_1 - x|^{\frac{1}{2}} + |y_1 - y|^{\frac{1}{2}}] < M_{11} \sqrt[4]{8} \{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2\}^{\frac{1}{4}}.$$

Das Integral $L(x, y)$ erfüllt, wie behauptet, die Höldersche Bedingung.

Dieselbe Eigenschaft hat das Integral

$$M(x, y) = \iint_T \frac{\partial}{\partial y} \{\beta(\xi - x)^2 + \alpha(\eta - y)^2\} \cdot W(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Der Beweis ist wie vorher zu führen.

Es mag zum Schluß noch der folgende Hilfssatz erwähnt werden:

Es sei $(\bar{x}, \bar{y})$ ein fester Punkt im Innern des Gebietes $T$; es sei ferner $K_2(x, y; \xi, \eta)$ eine beschränkte Funktion ihrer vier Argumente, welche überall, außer wenn $x = \xi$, $y = \eta$, sich stetig verhält. Als Funktion der Variablen $(\xi, \eta)$ betrachtet, hat die Funktion $K_2(x, y; \xi, \eta)$ im Punkte $(x, y)$ eine Unbestimmtheitsstelle. Es sei schließlich $K_3(\xi, \eta)$ eine beschränkte Funktion ihrer beiden Argumente, welche überall, außer vielleicht im Punkte $(x, \bar{y})$, sich stetig verhält.

Das Integral

$$H(x, y) = \iint_T \frac{K_2(x, y; \xi, \eta)\, K_3(\xi, \eta)}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^{\frac{1}{2}}} \log \{(\xi - \bar{x})^2 + (\eta - \bar{y})^2\}\, d\xi\, d\eta$$

ist eine in allen Punkten im Innern und auf dem Rande des Gebietes $T$ stetige Funktion der beiden Variablen $x$ und $y$.

Dieser Hilfssatz wird als bekannt vorausgesetzt.

Die Funktionen $V(x,y)$ und $W(x,y)$ sind bis jetzt als durchaus stetig vorausgesetzt worden. Sie mögen nunmehr in einem Punkte $(x_0,y_0)$ im Innern des Gebietes $T$ wie $[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{-\frac{1}{2}}$ unendlich werden. Man überzeugt sich ohne Mühe, daß das Integral $J(x,y)$ in allen Punkten im Innern des Gebietes $T$, außer wenn $x=x_0$, $y=y_0$, stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat und die Relation (48.) erfüllt. Die Integrale $K(x,y)$, $L(x,y)$, $M(x,y)$ genügen in allen von dem Punkte $(x_0,y_0)$ verschiedenen Punkten des Gebietes $T$ der Hölderschen Bedingung.

Es sei $\overline{K}$ irgendein den Punkt $(x_0,y_0)$ nicht enthaltender Teil des Gebietes $T$. Es ist z. B.

$$L(x,y)=\iint_T\left(a\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\log\left\{\beta(\xi-x)^2+\alpha(\eta-y)^2\right\}\right)V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=$$

$$=\iint_{\overline{K}}+\iint_{T-\overline{K}}.$$

Da die Funktion $V(\xi,\eta)$ in dem Gebiete $\overline{K}$ stetig ist, so erfüllt das erste der beiden Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung dem soeben bewiesenen Hülfssatze zufolge in dem Gebiete $\overline{K}$ die Höldersche Bedingung. Das über das Gebiet $T-\overline{K}$ erstreckte Integral hat offenbar in dem Gebiete $\overline{K}$ sogar stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Das Integral $L(x,y)$ erfüllt daher, wie behauptet, in jedem den Punkt $(x_0,y_0)$ nicht enthaltenden Teile des Gebietes $T$ die Höldersche Bedingung.

## Kapitel II.

### § 1.

Wie in der Einleitung gezeigt worden ist, wird die Möglichkeit der konformen Abbildung eines gegebenen Flächenstückes auf einen Teil einer Ebene dargetan sein, sobald es gelingt, irgendeine von Null verschiedene mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{73.}$$

aufzufinden. Die linke Seite der Gleichung (73.) ist nichts anderes als der zweite Beltramische Differentialparameter der Differentialform $Edx^2 + Gdy^2$.

Es wird nun zur Vereinfachung

$$\sqrt{\frac{G}{E}} = a, \quad \sqrt{\frac{E}{G}} = b = \frac{1}{a}$$

und demgemäß

$$L(u) \equiv a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{74.}$$

gesetzt. Die Größen $a$ und $b$ sind in dem Gebiete $c$ wesentlich positiv. In diesem Kapitel wird ferner angenommen, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}$ der Hölderschen Bedingung genügen.

Es sei $(\bar{x}, \bar{y})$ irgendein Punkt im Innern des Gebietes $c$. Es sei ferner $\varrho$ eine positive Zahl, die so klein gewählt ist, daß der Kreis um den Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ als Mittelpunkt vom Halbmesser $\varrho$ ganz im Innern des Gebietes $c$ enthalten bleibt. Das von diesem Kreise begrenzte endliche Gebiet sei mit $T$ bezeichnet.

Es soll jetzt eine Lösung $\mathfrak{G}(\bar{x}, \bar{y}; x, y)$ der Differentialgleichung (74.) angegeben werden, welche sich im Innern des Gebietes $T$ mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung, mit Ausnahme des Punktes $(\bar{x}, \bar{y})$, stetig verhält, in jenem Punkte aber logarithmisch unendlich wird.

Es möge zur Abkürzung

$$\bar{a} = a(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{b} = b(\bar{x}, \bar{y})$$

gesetzt werden. Der Ausdruck

$$\frac{\mathfrak{G}(\bar{x}, \bar{y}; x, y)}{\log\left\{\bar{b}(x-\bar{x})^2 + \bar{a}(y-\bar{y})^2\right\}} - 1 \tag{75.}$$

soll für $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ verschwinden.

Es wird nun

$$\mathfrak{G}(\bar{x}, \bar{y}; x, y) = \log\left\{\bar{b}(x-\bar{x})^2 + \bar{a}(y-\bar{y})^2\right\} + U(x, y) \tag{76.}$$

gesetzt. Die Funktion $U(x, y)$ soll eine im Innern des Gebietes $T$, möglicherweise mit Ausnahme des Punktes $(\bar{x}, \bar{y})$, mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$L(u) \equiv a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = -L\left(\log\left\{\bar{b}(x-\bar{x})^2 + \bar{a}(y-\bar{y})^2\right\}\right) =$$

(77.)

$$= 2(\bar{a}b - a\bar{b})\frac{\bar{a}(y-\bar{y})^2 - \bar{b}(x-\bar{x})^2}{[\bar{b}(x-\bar{x})^2 + \bar{a}(y-\bar{y})^2]^2} - 2\frac{\frac{\partial a}{\partial x}\bar{b}(x-\bar{x}) + \frac{\partial b}{\partial y}\bar{a}(y-\bar{y})}{\bar{b}(x-\bar{x})^2 + \bar{a}(y-\bar{y})^2} = 4\pi f(x,y)$$

sein. Die Funktion $f(x,y)$ ist in allen Punkten des Gebietes $c$, den Punkt $(\bar{x},\bar{y})$ ausgenommen, stetig. Das Produkt

$$f(x,y)\,[(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2]^{\frac{1}{2}}$$

ist für alle Werte der Variablen $x, y; \bar{x}, \bar{y}$ im Gebiete $c$ dem absoluten Betrage nach kleiner als eine gewisse positive Größe $N$ und hat, als Funktion der Größen $x$ und $y$ betrachtet, im Punkte $(\bar{x},\bar{y})$ eine Unbestimmtheitsstelle.

Es wird nun

$$U(x,y) = \iint_T \log\left\{\beta(\xi-x)^2 + \alpha(\eta-y)^2\right\} \cdot V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \tag{78.}$$

gesetzt. Die Funktion $V(\xi,\eta)$ ist so zu bestimmen, daß das Doppelintegral (78.) der Differentialgleichung (77.) genüge. Nimmt man an, daß die Funktion $V(\xi,\eta)$ sich im Gebiete $T$, außer etwa im Punkte $(\bar{x},\bar{y})$, stetig verhält und der Hölderschen Bedingung genügt, im Punkte $(\bar{x},\bar{y})$ aber höchstens wie $[(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2]^{-\frac{1}{2}}$ unendlich wird, so erhält man nach den Hilfssätzen des Kapitels I (vgl. besonders die Schlußbemerkung) zur Bestimmung der Funktion $V(\xi,\eta)$ die Beziehung

$$V(x,y) - \iint_T L(x,y;\xi,\eta)\,V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = f(x,y), \tag{79.}$$

$$L(x,y;\xi,\eta) = -\frac{1}{4\pi}L\left(\log\left\{\beta(\xi-x)^2 + \alpha(\eta-y)^2\right\}\right) = \tag{80.}$$

$$= \frac{1}{2\pi}(\alpha b - a\beta)\frac{\alpha(y-\eta)^2 - \beta(x-\xi)^2}{[\beta(x-\xi)^2 + \alpha(y-\eta)^2]^2} - \frac{1}{2\pi}\frac{\frac{\partial a}{\partial x}\beta(x-\xi) + \frac{\partial b}{\partial y}\alpha(y-\eta)}{\beta(x-\xi)^2 + \alpha(y-\eta)^2}.$$

Die Funktion $L(x,y;\xi,\eta)$ ist der Funktion $f(x,y)$ ganz analog. Sie verhält sich stetig, außer wenn $x=\xi$, $y=\eta$ ist. Das Produkt

$$[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2]^{\frac{1}{2}}\,L(x,y;\xi,\eta)$$

hat, als Funktion der Veränderlichen $\xi$ und $\eta$ betrachtet, im Punkte $(x,y)$ eine Unbestimmtheitsstelle. Wie man sich leicht überzeugt, ist für alle Werte der Variablen $x, y; \xi, \eta$ im Gebiete $c$

$$|L(x,y;\xi,\eta)|\,[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{\frac{1}{2}} < N. \tag{81.}$$

Die Beziehung (79.) stellt nach der Bezeichnungsweise des Hrn. Hilbert eine lineare nicht homogene Integralgleichung zweiter Art dar.

Um die Integralgleichung (79.) aufzulösen, kann man sich des Verfahrens der sukzessiven Approximationen bedienen. Hierzu sind die unendlich vielen Funktionen: $V^{(0)}(x,y)$, $V^{(1)}(x,y)-V^{(0)}(x,y)$, $V^{(2)}(x,y)-V^{(1)}(x,y)$, $\cdots$ den Formeln

$$(82.)\quad \begin{cases} V^{(0)}(x,y) = f(x,y), \\ V^{(1)}(x,y)-V^{(0)}(x,y) = \iint\limits_T L(x,y;\xi,\eta)\, V^{(0)}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta, \\ V^{(2)}(x,y)\quad V^{(1)}(x,y) = \iint\limits_T L(x,y;\xi,\eta)\, [V^{(1)}(\xi,\eta)-V^{(0)}(\xi,\eta)]\, d\xi\, d\eta, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

gemäß zu berechnen. Die Differenz $V^{(1)}(x,y)-V^{(0)}(x,y)$ ist, als Funktion der Variablen $(x,y)$ betrachtet, überall, den Punkt $(\bar{x},\bar{y})$ ausgenommen, stetig. Ferner gilt die Ungleichheitsbedingung

$$|V^{(1)}(x,y)-V^{(0)}(x,y)| < N^2 \iint\limits_T [(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^{-\frac{1}{2}}\, [(\xi-\bar{x})^2+(\eta-\bar{y})^2]^{-\frac{1}{2}}\, d\xi\, d\eta,$$

wofür man nach der Formel (58.) auch setzen kann

$$(83.)\quad |V^{(1)}(x,y)-V^{(0)}(x,y)| < N^2\, [M'\, |\log\{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2\}| + N'].$$

Der Einfachheit halber möge im folgenden der Halbmesser $\varrho$ den Ungleichheitsbedingungen

$$\varrho < \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{2,718..}}, \quad \varrho < \frac{1}{8\pi N}$$

gemäß angenommen werden. Es ist dann sicher

$$(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2 < \frac{1}{e}, \quad |\log\{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2\}| > 1,$$

daher

$$(84.)\quad |V^{(1)}(x,y)-V^{(0)}(x,y)| < N^2\,(M'+N')\, |\log\{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2\}|.$$

Die nächstfolgende Differenz $V^{(2)}(x,y)-V^{(1)}(x,y)$ ist dem Hilfssatze am Schluß des I. Kapitels zufolge bereits in allen Punkten des Gebietes $T$ stetig. In der Tat ist

$$V^{(2)}(x,y)-V^{(1)}(x,y) = \iint_T K_2(x,y;\xi,\eta)\,K_3(\xi,\eta)\,\frac{\log\{(\xi-\bar{x})^2+(\eta-\bar{y})^2\}}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^{\frac{1}{2}}}\,d\xi\,d\eta\,,$$

$$K_2(x,y;\xi,\eta) = L(x,y;\xi,\eta)\,[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^{\frac{1}{2}}\,,$$

$$K_3(\xi,\eta) = \frac{V^{(1)}(\xi,\eta)-V^{(0)}(\xi,\eta)}{\log\{(\xi-\bar{x})^2+(\eta-\bar{y})^2\}}\,.$$

Wendet man die Beziehungen (57.) und (84.) an, so erhält man

$$|V^{(2)}(x,y)-V^{(1)}(x,y)| < N^3(M'+N')\,M_0\,. \tag{85.}$$

Es ist ferner

$$|V^{(k+1)}(x,y)-V^{(k)}(x,y)| \leqq \iint_T |L(x,y;\xi,\eta)|\,[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\frac{1}{2}}\,\frac{|V^{(k)}(\xi,\eta)-V^{(k-1)}(\xi,\eta)|}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\frac{1}{2}}}\,d\xi\,d\eta\,.$$

$$\begin{aligned}(86.)\qquad &< \int_0^{2\varrho}\int_0^{2\pi} N\,|V^{(k)}(\xi,\eta)-V^{(k-1)}(\xi,\eta)|\,dr\,d\theta < 4\pi\varrho\,N\,\mathrm{Max}\,|V^{(k)}(x,y)-V^{(k-1)}(x,y)| < \\ &< (4\pi\varrho\,N)^{k-1}\,\mathrm{Max}\,|V^{(2)}(x,y)-V^{(1)}(x,y)| < (4\pi\varrho\,N)^{k-1}\,N^3(M'+N')\,M_0\,.\end{aligned}$$

Da nun

$$4\pi\varrho\,N < \tfrac{1}{2}$$

ist, so konvergiert die unendliche Reihe

$$[V^{(2)}(x,y)-V^{(1)}(x,y)]+[V^{(3)}(x,y)-V^{(2)}(x,y)]+\cdots \tag{86.}^{\text{bis}}$$

für alle dem Gebiete $T$ angehörenden Wertepaare $(x,y)$ in gleichem Grade und stellt somit eine stetige Funktion dieser beiden Veränderlichen dar. Addiert man entsprechend die rechten und die linken Seiten der Gleichungen (82.) zusammen, so findet man, daß die Funktion

$$V(x,y) = V^{(0)}(x,y)+[V^{(1)}(x,y)-V^{(0)}(x,y)]+[V^{(2)}(x,y)-V^{(1)}(x,y)]+\cdots \tag{87.}$$

eine Lösung der Integralgleichung (79.) ist.

## § 2.

Es sei $(x,y)$ irgendein von dem Punkte $(\bar{x},\bar{y})$ verschiedener Punkt im Innern des Gebietes $T$. Die Funktion $f(x,y)$ erfüllt im Punkte $(x,y)$ die Höldersche Bedingung. Die Integrale

$$\iint_T \left(a\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\log\left\{\beta(\xi-x)^2+\alpha(\eta-y)^2\right\}\right)V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

$$\iint_T \frac{\partial}{\partial x}\log\left\{\beta(\xi-x)^2+\alpha(\eta-y)^2\right\}\cdot V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

$$\iint_T \frac{\partial}{\partial y}\log\left\{\beta(\xi-x)^2+\alpha(\eta-y)^2\right\}\cdot V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

haben dieselbe Eigenschaft.

Aus der Gleichung (79.) folgt nunmehr, daß die Funktion $V(x,y)$ in allen Punkten des Gebietes $T$, den Punkt $(\bar{x},\bar{y})$ ausgenommen, der Hölderschen Bedingung genügt. Aus den Hilfssätzen des I. Kapitels (vgl. namentlich die Schlußbemerkung) folgt, daß das Integral (78.) eine Lösung der Differentialgleichung (77.), somit die Funktion

$$(88.)\qquad \mathfrak{G}(\bar{x},\bar{y};x,y)=\log\left\{\bar{b}(x-\bar{x})^2+\bar{a}(y-\bar{y})^2\right\}+U(x,y)$$

eine Lösung der Differentialgleichung (74.) ist.

Den Hilfssätzen des § 6 des I. Kapitels zufolge ist die Funktion $U(x,y)$ in dem Gebiete $T$ beschränkt. Aus den Ungleichheitsbedingungen (84.), (85.) und (86.) ergibt sich die weitere Ungleichheitsbedingung

$$\begin{aligned}(89.)\qquad |V(x,y)| &< N\left[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2\right]^{-\frac{1}{2}}+N^2(M'+N')\left|\log\left\{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2\right\}\right|+\\ &+N^3(M'+N')M_0\left(1+(4\pi N\varrho)+(4\pi N\varrho)^2+\cdots\right)<\\ &<N\left[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2\right]^{-\frac{1}{2}}+N^2(M'+N')\left|\log\left\{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2\right\}\right|+2N^3(M'+N')M_0.\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung wird jetzt

$$N^2(M'+N')=P,\qquad 2N^3(M'+N')M_0=Q$$

gesetzt. Die Ungleichheitsbedingung (89.) geht über in

$$(90.)\qquad |V(x,y)|<N\left[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2\right]^{-\frac{1}{2}}+P\left|\log\left\{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2\right\}\right|+Q.$$

Ferner ist

$$\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|=\left|\iint_T \frac{2\beta(\xi-x)}{\beta(\xi-x)^2+\alpha(\eta-y)^2}V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right|<\Omega_1+\Omega_2+\Omega_3,$$

$$\Omega_1=\frac{1}{m}\iint_T \frac{2MN}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[(\xi-\bar{x})^2+(\eta-\bar{y})^2\right]^{\frac{1}{2}}}d\xi\,d\eta,$$

$$\Omega_2=\frac{1}{m}\iint_T \frac{2MP\left|\log\left\{(\xi-\bar{x})^2+(\eta-\bar{y})^2\right\}\right|}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\right]^{\frac{1}{2}}}d\xi\,d\eta,$$

$$\Omega_3=\frac{1}{m}\iint_T \frac{2MQ}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\right]^{\frac{1}{2}}}d\xi\,d\eta.$$

Hieraus folgt

$$\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| < \frac{2MM'N}{m}\,|\log\{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2\}| + \frac{2M}{m}\{NN'+PM_0+4\pi Q\varrho\} <$$

$$< \frac{2MM'N}{m}\,|\log\{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2\}| + \frac{2M}{m}\left\{NN'+PM_0+\frac{Q}{2N}\right\}.$$

Der Einfachheit halber möge

$$\frac{2MM'N}{m} = P', \quad \frac{2M}{m}\left\{NN'+PM_0+\frac{Q}{2N}\right\} = Q',$$

gesetzt werden.

Man erhält alsdann die Ungleichheitsbedingung

$$\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| < P'\,|\log\{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2\}| + Q', \tag{91.}$$

und ebenso

$$\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| < P'\,|\log\{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2\}| + Q'. \tag{92.}$$

Die soeben gefundene, im Punkte $(\bar{x},\bar{y})$ logarithmisch unendlich werdende Lösung $\mathfrak{G}(\bar{x},\bar{y};x,y)$ der Differentialgleichung (74.) hat nun die folgende Eigenschaft. Der Ausdruck

$$R = \frac{1}{b}\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{G}(x,\bar{y};x,y)\right)^2 + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{G}(\bar{x},\bar{y};x,y)\right)^2$$

ist in allen Punkten einer gewissen Umgebung des Punktes $(\bar{x},\bar{y})$ von Null verschieden.

In der Tat, ist

$$R = \frac{4}{b(x-\bar{x})^2+a(y-\bar{y})^2} + \frac{1}{b}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 +$$

$$+4\left[\frac{(x-\bar{x})\dfrac{\partial U}{\partial x}}{b(x-\bar{x})^2+a(y-\bar{y})^2} + \frac{(y-\bar{y})\dfrac{\partial U}{\partial y}}{b(x-\bar{x})^2+a(y-\bar{y})^2}\right]$$

und

$$|R| \geq \frac{4}{b(x-\bar{x})^2+a(y-\bar{y})^2} - \frac{1}{b}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{a}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 -$$

$$-4\left|\frac{(x-x)\dfrac{\partial U}{\partial x}}{b(x-\bar{x})^2+a(y-\bar{y})^2} + \frac{(y-\bar{y})\dfrac{\partial U}{\partial y}}{b(x-\bar{x})^2+a(y-\bar{y})^2}\right|.$$

Es sei zur Abkürzung

$$(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2=r^2$$

gesetzt. Es ist dann

$$|R|>\frac{4}{Mr^2}-\frac{8}{mr}\left\{2P'|\log r|+Q'\right\}-\frac{2}{m}\left\{2P'|\log r|+Q'\right\}^2.$$

Es sei $\varrho_0$ eine beliebig kleine positive Zahl, $c_1$ derjenige Teil des Gebietes $c$, der alle Punkte enthält, deren Entfernung von der Randkurve $S$ gleich oder größer ist als $\varrho_0$. Es sei $\varrho \leqq \varrho_0$.

Augenscheinlich kann man eine Zahl $\omega < \varrho_0$ so klein annehmen, daß für alle Werte der Entfernung $r$, welche der Ungleichheitsbedingung $r \leqq \omega$ genügen,

$$|R|>0$$

wird. Im Innern und auf dem Rande des Kreises vom Halbmesser $\omega$ um den Punkt $(\bar{x},\bar{y})$ können somit die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{G}(\bar{x},\bar{y};x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{G}(\bar{x},\bar{y};x,y)$$

nicht gleichzeitig verschwinden.

Die Halbmesser $\varrho$ und $\omega$ hängen nur von den Größen $M$, $A$, $m$ und $\varrho_0$ ab. Der Punkt $(\bar{x},\bar{y})$ kann daher beliebig im Innern und auf dem Rande des Gebietes $c_1$ angenommen werden.

Es sei $(x_0,y_0)$ irgendein Punkt des Gebietes $c_1$ und $K_0$ der Kreis um den Punkt $(x_0,y_0)$ vom Halbmesser $\frac{1}{4}\omega$. Es sei $(\bar{x},\bar{y})$ irgendein Punkt im Innern des Gebietes $c_1$, dessen Entfernung von dem Punkte $(x_0,y_0)$ den Wert $\frac{3}{4}\omega$ hat.

Die Lösung $u(x,y)=\mathfrak{G}(\bar{x},\bar{y};x,y)$ und ihre partiellen Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung sind in allen Punkten des Kreises $K_0$ stetig. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ können in keinem Punkte des Gebietes $K_0$ gleichzeitig verschwinden.

Es sei $(x',y')$ irgendein Punkt im Innern des Kreises $K_0$. Das Integral

$$(93.)\qquad v(x,y)=\int_{(x',y')}^{}-b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{G}(\bar{x},\bar{y};x,y)\,dx+a(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{G}(\bar{x},\bar{y};x,y)\,dy=$$

$$=\int_{(x',y')}^{}-b\frac{\partial u}{\partial y}\,dx+a\frac{\partial u}{\partial x}\,dy$$

ist in dem Gebiete $K_0$ eine eindeutige, mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung der Differentialgleichung (74.), welche mit der Lösung $u(x, y)$ durch die Gleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -b\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = a\frac{\partial u}{\partial x} \tag{94.}$$

zusammenhängt.

Aus den in der Einleitung gegebenen Entwickelungen ergibt sich nunmehr der folgende Satz:

Durch Vermittelung der Funktion $u+vi$ wird ein gewisser einfach zusammenhängender Teil des gegebenen Flächenstückes, welcher den Punkt $(x_0, y_0)$ in seinem Innern enthält, zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich auf ein gewisses ebenes Gebiet abgebildet.

Zu den soeben durchgeführten Betrachtungen ist noch folgendes zu bemerken:

Es würde naheliegen,

$$e^{u(x,y)+iv(x,y)} = \bar{u}(x, y) + i\bar{v}(x, y)$$

zu setzen und die durch die Funktion $\bar{u}(x, y) + i\bar{v}(x, y)$ vermittelte konforme Abbildung zu betrachten. Die Funktionen $\bar{u}(x, y)$ und $\bar{v}(x, y)$ bilden, wie man sich leicht überzeugt, gleichfalls ein System der Lösungen der simultanen partiellen Differentialgleichungen (94.). Diese Lösungen sind noch in der Umgebung des Punktes $(\bar{x}, \bar{y})$ beschränkt. Man hätte hierbei indessen das Verhalten der partiellen Ableitungen $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ in der Umgebung des Punktes $(\bar{x}, \bar{y})$ zu untersuchen, was sich, wie es scheint, ohne langwierige Spezialbetrachtungen kaum würde durchführen lassen.

## Kapitel III.

### § 1.

Es sei $f(x)$ eine in dem Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ erklärte reelle, stetige Funktion der Variablen $x$, die der Ungleichheitsbedingung

$$|f(x+h)-f(x)| < A_3 h$$

genügt. Hierin bezeichnet $A_3$ eine gewisse positive Zahlgröße.

Nach einem bekannten Satze des Hrn. Lebesgue[1] hat die Funktion $f(x)$ in dem Intervall $0 \leqq x \leqq 1$, außer höchstens in einer gewissen Menge von Punkten vom Maße Null, die beschränkte Ableitung $\frac{df(x)}{dx}$.

Es mögen jetzt die Wertsysteme $(x, y)$ und $(x+h, y+h')$ Koordinaten zweier beliebigen Punkte im Innern oder auf dem Rande des Gebietes $c$ bezeichnen. Es sei $F(x, y)$ eine reelle, stetige Funktion der Veränderlichen $x$ und $y$, die der Ungleichheitsbedingung

$$|F(x+h, y+h') - F(x, y)| < A_4\{|h| + |h'|\} \tag{95.}$$

genügt. Hierin bezeichnet $A_4$ eine gewisse positive Größe.

Es mögen nunmehr die Wertepaare $(x_1', y_1)$ und $(x_1'', y_1)$ die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden $y = y_1$ mit der Randkurve des Gebietes $c$ bezeichnen. (Der Einfachheit halber wird vorausgesetzt, daß die Randkurve des Gebietes $c$ von jeder der $X$- oder der $Y$-Achse parallelen Geraden höchstens in zwei Punkten geschnitten wird.) Dem soeben erwähnten Satze von Hrn. Lebesgue zufolge ist in allen Punkten des Gebietes

$$y = y_1, \quad x_1' \leqq x \leqq x_1'',$$

außer höchstens in einer Menge von Punkten vom Längenmaße Null, die partielle Ableitung $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$ vorhanden und erfüllt die Ungleichheitsbedingung

$$\left| \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right| < A_4.$$

Da diese Beziehung für jeden Wert $y_1$ der Variablen $y$ gilt, vorausgesetzt, daß auf der Geraden $y = y_1$ überhaupt Punkte des Gebietes $c$ liegen, so ist die partielle Ableitung $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$ in allen Punkten des Gebietes $c$, außer höchstens in einer gewissen Menge von Punkten vom Flächenmaße Null, vorhanden und beschränkt.

Desgleichen ist die partielle Ableitung $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ überall im Gebiete $c$, außer höchstens in einer gewissen Punktmenge vom Flächenmaße Null, vorhanden und beschränkt. Es ist

$$\left| \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right| < A_4.$$

[1] Vgl. H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Paris, 1904, S. 121.

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ und $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ sind entsprechend in den Gebieten, in denen sie existieren, im Lebesgueschen Sinne integrierbar. Da der Wert eines Lebesgueschen Integrals sich nicht ändert, wenn man die zu integrierende Funktion in irgendeiner Menge von Punkten vom Maße Null beliebig variiert, ja selbst unendlich große Werte annehmen läßt, so kann man den Funktionen $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ in den vorhin ausgeschlossenen Punktmengen mit Hrn. de la Vallée Poussin beliebige endliche oder unendlich große Werte beilegen.

Es möge vorübergehend irgend ein Teil des Gebietes $c$, insbesondere auch das Gebiet $c$ selbst, mit $c_0$ bezeichnet werden. Hiernach sind die beiden im Lebesgueschen Sinne genommenen Doppelintegrale

$$\iint_{c_0} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy, \quad \iint_{c_0} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy$$

sicher vorhanden.

Nach einem Satze des Hrn. L. Tonelli kann man eine unendliche Folge von Polynomen $P_1(x,y)$, $P_2(x,y)$, $\cdots$ angeben, die folgende Eigenschaften haben.

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial P_k(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial P_k(x,y)}{\partial y}$ sind für alle Werte des Zeigers $k$ in allen Punkten im Innern und auf dem Rande des Gebietes $c$ dem absoluten Betrage nach kleiner als die Zahl $A_4$. In allen Punkten dieses Gebietes ist

$$\lim_{k=\infty} P_k(x,y) = F(x,y). \tag{96.}$$

In demselben Gebiete, höchstens mit Ausnahme einer gewissen Menge von Punkten vom Flächenmaße Null, ist schließlich

$$\lim_{k=\infty} \frac{\partial P_k(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \lim_{k=\infty} \frac{\partial P_k(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}. \tag{97.}$$

[1] Vgl. L. Tonelli, Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1910, S. 1—36.

Nach einem bekannten Satze des Hrn. Lebesgue[1] ist hiernach

$$\lim_{k=\infty} \iint_{c_0} P_k(x,y)\,dx\,dy = \iint_{c_0} F(x,y)\,dx\,dy, \tag{98.}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{k=\infty} \iint\limits_{c_0} \dfrac{\partial P_k(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy = \iint\limits_{c_0} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy, \\ \lim\limits_{k=\infty} \iint\limits_{c_0} \dfrac{\partial P_k(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy = \iint\limits_{c_0} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy. \end{cases} \tag{99.}$$

## § 2.

Nach diesen Vorbereitungen sollen jetzt die Betrachtungen der beiden vorhergehenden Kapitel weiter fortgeführt werden.

Es ist bis jetzt angenommen worden, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial E}{\partial x}, \frac{\partial E}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}$ existieren und der Hölderschen Bedingung genügen. Diese Voraussetzungen werden jetzt fallen gelassen, und es wird nur angenommen, daß die Größen $E$ und $G$ die Ungleichheitsbedingungen

$$\left.\begin{matrix} |E(x+h,y+h')-E(x,y)| \\ |G(x+h,y+h')-G(x,y)| \end{matrix}\right\} < A_5\{|h|+|h'|\} \tag{100.}$$

erfüllen. Hierin bezeichnet $A_5$ eine bestimmte positive Größe. Die Funktionen $a$ und $b = a^{-1}$ erfüllen augenscheinlich gewisse den Formeln (100.) analoge Relationen. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}$ sind überall im Gebiete $c$, außer höchstens in einer Menge $(q)$ von Punkten vom Flächenmaße Null, vorhanden und beschränkt. Im folgenden wird, da Verwechselung nicht zu befürchten ist, für das Wort »Flächenmaß« der kürzere Ausdruck »Maß« gebraucht. Die zu einer Punktmenge $(p)$ im Gebiete $c$ komplementäre Menge wird mit $c-p$ bezeichnet.

Es sei $(x,y)$ irgendein Punkt des Gebietes $c-q$. Wie aus der Formel (80.) hervorgeht, ist die Funktion $L(x,y;\xi,\eta)$, als Funktion der Variablen $(\xi,\eta)$ aufgefaßt, im Gebiete $c$, außer im Punkte $\xi = x, \eta = y$, stetig. In dem zuletzt genannten Punkte wird der Ausdruck $L(x,y;\xi,\eta)$ von der ersten Ordnung unendlich groß. Es sei jetzt zweitens $(x,y)$ ein Punkt

[1] Vgl. H. Lebesgue, a. a. O. S. 114

der Menge $(q)$. Die Funktionen $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}$ sind für diese Punktmenge nicht erklärt; man erteile ihnen daselbst beliebige endliche Werte, etwa den Wert Null. Offenbar wird dann die Funktion $L(x, y; \xi, \eta)$ im Punkte $\xi = x, \eta = y$ wie vorhin von der ersten Ordnung unendlich groß.

Es sei jetzt $(\xi, \eta)$ irgendein Punkt des Gebietes $c$. Als Funktion der Variablen $(x, y)$ aufgefaßt, ist der Ausdruck $L(x, y; \xi, \eta)$ im Gebiete $c-q$, außer im Punkte $x = \xi, y = \eta$, beschränkt, stellt daselbst nach der Klassifikation des Hrn. Baire eine Funktion der ersten Klasse dar und ist somit im Lebesgueschen Sinne integrierbar.

Es sei nunmehr die lineare Integralgleichung

$$V(x, y) - \iint_T L(x, y; \xi, \eta)\, V(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = f(x, y), \tag{101.}$$

$$f(x, y) = -\frac{1}{4\pi} L\left[\log\left\{b(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x})^2 + a(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y})^2\right\}\right],$$

in der $(\bar{x}, \bar{y})$ irgendeinen in dem Gebiete $c_1$ gelegenen Punkt der Menge $c-q$ bezeichnet, vorgelegt. Das in der Gleichung (101.) auftretende Doppelintegral ist, wie alle in diesem Abschnitte vorkommenden Integrale, als Integral im Sinne des Hrn. Lebesgue aufzufassen. Der Bequemlichkeit halber wird hierbei stets von der von Hrn. de la Vallée Poussin angegebenen Verallgemeinerung des Lebesgueschen Integralbegriffes Gebrauch gemacht[1].

Es sei $q_1$ die Gesamtheit aller Punkte, welche dem Kreisgebiete $T$ und der Punktmenge $q$ zugleich angehören.

Die Funktion $V^{(0)}(x, y) = f(x, y)$ ist in der Punktmenge $T-q_1$ eine Funktion der ersten Klasse; sie ist somit sicher im Lebesgueschen Sinne integrierbar. Die Funktion

$$V^{(1)}(x, y) - V^{(0)}(x, y) = \iint_T L(x, y; \xi, \eta)\, V^{(0)}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{102.}$$

ist für alle Werte der Variablen $(x, y)$ im Gebiete $T-q_1$, außer im Punkte $(\bar{x}, \bar{y})$, erklärt und stellt daselbst eine beschränkte, im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion dar. Dies kann etwa aus gewissen vom Ver-

[1] Vgl. Ch. J. de la Vallée Poussin, Réduction des intégrales doubles de Lebesgue. Application à la définition des fonctions analytiques, Bull. de l'Acad. Roy. de Belgique, 1910, S. 768—798, insbesondere S. 771.

fasser angegebenen Sätzen über die Integration eines bestimmten Integrals in bezug auf einen Parameter gefolgert werden[1]. In der Umgebung des Punktes $(\bar{x}, \bar{y})$ wird die Funktion $V^{(1)}(x,y) - V^{(0)}(x,y)$ logarithmisch unendlich. Man sieht nunmehr leicht ein, daß für alle Werte der Variablen $(x,y)$ im Gebiete $T-q_1$ die Funktionen $V^{(2)}(x,y) - V^{(1)}(x,y)$, $V^{(3)}(x,y) - V^{(2)}(x,y)$, $\cdots$ beschränkt und im Lebesgueschen Sinne integrierbar sind. Man überzeugt sich ferner, daß in allen Punkten $(x,y)$ der Menge $T-q_1$ die Beziehungen (84.), (85.) und (86.) ihre Gültigkeit behalten. Die in der Punktmenge $T-q_1$ erklärte unendliche Reihe (86.)$^{\text{bis}}$ konvergiert auch jetzt noch unbedingt und im gleichen Grade. Die durch die Formel (87.) in dem Gebiete $T-q_1$ erklärte Funktion $V(x,y)$ ist daselbst, außer im Punkte $(\bar{x}, \bar{y})$, beschränkt und im Lebesgueschen Sinne integrierbar. Im Punkte $(\bar{x}, \bar{y})$ wird die Funktion $V(x,y)$ von der ersten Ordnung unendlich groß.

Das Integral

$$(103.) \qquad U(x,y) = \iint_T \log\left\{\beta(\xi-x)^2 + \alpha(\eta-y)^2\right\} \cdot V(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

ist in allen Punkten $(x,y)$ des Gebietes $T$ stetig und hat überall, den Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ ausgenommen, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung.

Es sei, wie früher, $(x_0, y_0)$ ein Punkt des Gebietes $c_1$, dessen Entfernung von dem Punkte $(\bar{x}, \bar{y})$ den Wert $\frac{3}{4}\omega$ hat, und $K_0$ der Kreis vom Halbmesser $\frac{1}{4}\omega$ um den Punkt $(x_0, y_0)$. Es sei schließlich wieder

$$(104.) \qquad \mathfrak{G}(\bar{x}, \bar{y}; x, y) = u(x,y) = \log\left\{\bar{b}(x-\bar{x})^2 + \bar{a}(y-\bar{y})^2\right\} + U(x,y).$$

In allen Punkten der Kreisfläche $K_0$ sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ und $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ stetig und der Ausdruck $\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)^2$ ist von Null verschieden.

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung $\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2}$ sind im allgemeinen nicht endlich oder nicht vorhanden und demgemäß kann die Funktion $u(x,y) = \mathfrak{G}(\bar{x}, \bar{y}; x, y)$ nicht mehr als eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (74.) angesehen werden. Nichtsdestoweniger gibt es, wie gleich gezeigt werden wird, in allen Punkten des

[1] Vgl. die Arbeit: Über die zweimalige Integration von Funktionen zweier reeller Veränderlichen, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, 1911, S. 55—69.

Gebietes $K_0$ eine eindeutige, mit ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion $v(x, y)$, für welche die Gleichungen bestehen

$$\frac{\partial v}{\partial y} = a\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -b\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{105.}$$

Diese Behauptung kann man auch, wie folgt, ausdrücken:
Das Integral

$$\int -b\frac{\partial u}{\partial y}dx + a\frac{\partial u}{\partial x}dy, \tag{106.}$$

erstreckt über eine beliebige geschlossene, mit allen ihren Punkten dem Gebiete $K_0$ angehörende rektifizierbare Kurve, hat den Wert Null.

Beweis.

Es sei dem zu Anfang dieses Kapitels genannten Satze des Hrn. Tonelli gemäß $a_1(x, y), a_2(x, y), \cdots$ eine unendliche Folge von Polynomen, die folgende Eigenschaften haben:

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial a_k(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial a_k(x, y)}{\partial y}$ sind in allen Punkten im Innern und auf dem Rande des Gebietes $c$ dem absoluten Betrage nach kleiner, als eine gewisse positive Größe $A_6$. In allen Punkten des Gebietes $c$ ist

$$\lim_{k=\infty} a_k(x, y) = a(x, y). \tag{107.}$$

In demselben Gebiete, höchstens mit Ausnahme einer Menge $q_2$ von Punkten vom Maße Null, ist

$$\lim_{k=\infty} \frac{\partial a_k(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial a(x, y)}{\partial x}, \quad \lim_{k=\infty} \frac{\partial a_k(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial a(x, y)}{\partial y}. \tag{108.}$$

Setzt man $\frac{1}{a_k(x, y)} = b_k(x, y)$, so erhält man die weiteren Relationen

$$\lim_{k=\infty} b_k(x, y) = b(x, y), \quad \lim_{k=\infty} \frac{\partial b_k(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial b(x, y)}{\partial x}, \quad \lim_{k=\infty} \frac{\partial b_k(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial b(x, y)}{\partial y}. \tag{109.}$$

Es sei $V_k(x, y)$ die Lösung der linearen Integralgleichung

$$V_k(x, y) - \iint_T L_k(x, y; \xi, \eta)\, V_k(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = f_k(x, y), \tag{110.}$$

$$f_k(x, y) = -\frac{1}{4\pi} L_k\left[\log\left\{\bar{b}_k(x-\bar{x})^2 + \bar{a}_k(y-\bar{y})^2\right\}\right].$$

Hierin bezeichnen $L_k(x,y;\xi,\eta)$, $L_k(w), f_k(x,y)$ die Ausdrücke, die aus den Ausdrücken $L(x,y;\xi,\eta)$, $L(w), f(x,y)$ entstehen, wenn man in diesen die Funktionen $a, b, \bar{a}, \bar{b}, \alpha, \beta$, $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}$ entsprechend durch die Funktionen $a_k(x,y) = a_k$, $b_k$, $a_k(\bar{x},\bar{y}) = \bar{a}_k$, $b_k(\bar{x},\bar{y}) = \bar{b}_k$, $a_k(\xi,\eta) = \alpha_k$, $\beta_k$, $\frac{\partial a_k}{\partial x}$ und $\frac{\partial b_k}{\partial y}$ ersetzt. Aus den Entwicklungen des zweiten Kapitels folgt, daß man eine Größe $\varrho^*$ so klein wählen kann, daß für alle Werte der Größe $\varrho \leqq \varrho^*$ die Integralgleichung (110.) für jeden Wert des Zeigers $k$ gewiß eine Lösung hat. (Es sei daran erinnert, daß die Größe $\varrho$ den Halbmesser des Kreises $T'$ um den Punkt $(\bar{x},\bar{y})$ bezeichnet. In den Entwicklungen des zweiten Kapitels tritt bei diesen Betrachtungen an Stelle der Größe $A$ die Größe $A_6$ ein, an Stelle der Zahlen $M, m, N$ treten gewisse positive Werte $M^*, m^*, N^*$ ein.)

Diese Lösung kann, wie an jener Stelle auseinandergesetzt worden ist, nach dem Verfahren der sukzessiven Approximationen ermittelt werden. Man erhält

$$(111.)\quad V_k(x,y) = V_k^{(0)}(x,y) + (V_k^{(1)}(x,y) - V_k^{(0)}(x,y)) + (V_k^{(2)}(x,y) - V_k^{(1)}(x,y)) + \cdots$$

Es sollen jetzt diese unendliche Reihe und die unendliche Reihe

$$(112.)\quad V(x,y) = V^{(0)}(x,y) + (V^{(1)}(x,y) - V^{(0)}(x,y)) + (V^{(2)}(x,y) - V^{(1)}(x,y)) + \cdots$$

einer vergleichenden Betrachtung unterzogen werden.

In allen Punkten der Menge $T - q_2$, außer im Punkte $(\bar{x},\bar{y})$, ist offenbar

$$(113.)\qquad \lim_{k=\infty} V_k^{(0)}(x,y) = V^{(0)}(x,y).$$

Es sei $(x,y)$ irgendein Punkt der Menge $T - q_2$. In allen Punkten $(\xi,\eta)$ des Gebietes $T$, außer wenn $\xi = x$, $\eta = y$, ist

$$(114.)\qquad \lim_{k=\infty} L_k(x,y;\xi,\eta) = L(x,y;\xi,\eta).$$

Daher ist in allen Punkten des Gebietes $T - q_2$, den Punkt $(\bar{x},\bar{y})$ ausgenommen,

$$(115.)\qquad \lim_{k=\infty} (V_k^{(1)}(x,y) - V_k^{(0)}(x,y)) = V^{(1)}(x,y) - V^{(0)}(x,y).$$

In ähnlicher Weise überzeugt man sich, daß in allen Punkten der Menge $T - q_2$

$$(116.)\quad \lim_{k=\infty} (V_k^{(i+1)}(x,y) - V_k^{(i)}(x,y)) = V^{(i+1)}(x,y) - V^{(i)}(x,y), \qquad (i = 1,2,\cdots).$$

Da nun die unendlichen Reihen

$$(117.)\quad \left(V_k^{(2)}(x,y)-V_k^{(1)}(x,y)\right)+\left(V_k^{(3)}(x,y)-V_k^{(2)}(x,y)\right)+\cdots, \qquad (k=1,2,\cdots)$$

und

$$(118.)\quad \left(V^{(2)}(x,y)-V^{(1)}(x,y)\right)+\left(V^{(3)}(x,y)-V^{(2)}(x,y)\right)+\cdots$$

im Gebiete $T-q_2$ in gleichem Grade konvergieren, so ist daselbst, außer wenn $x=\bar{x}$, $y=\bar{y}$,

$$(119.)\qquad \lim_{k=\infty} V_k(x,y)=V(x,y).^1$$

Es sei

$$(120.)\quad U_k(x,y)=\iint_T \log\left\{\beta_k(\xi-x)^2+\alpha_k(\eta-y)^2\right\}\cdot V_k(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Nach bekannten Sätzen ist überall im Gebiete $T$

$$(121.)\qquad \lim_{k=\infty} U_k(x,y)=U(x,y).$$

Ferner ist in allen Punkten dieses Gebietes, außer im Punkte $(\bar{x},\bar{y})$,

$$(122.)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{k=\infty}\dfrac{\partial U_k(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}, \\ \lim\limits_{k=\infty}\dfrac{\partial U_k(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}. \end{cases}$$

Es sei jetzt

$$(123.)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{G}_k(\bar{x},\bar{y};x,y)=&\log\left\{\bar{b}_k(x-\bar{x})^2+\bar{a}_k(y-\bar{y})^2\right\}+\\ &+\iint_T \log\left\{\beta_k(\xi-x)^2+\alpha_k(\eta-y)^2\right\}\cdot V_k(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \end{aligned}$$

diejenige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$(124.)\qquad a_k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b_k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial a_k}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial b_k}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

die der im II. Kapitel eingeführten Funktion $\mathfrak{G}(\bar{x},\bar{y};x,y)$ analog ist.

Die Funktion $\mathfrak{G}_k(\bar{x},\bar{y};x,y)$ ist in allen Punkten des Gebietes $K_0$ mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig. Das Integral

$$(125.)\qquad \int_{\bar{s}} -b_k(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{G}_k(\bar{x},y;x,y)\,dx+a_k(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{G}_k(\bar{x},\ \ ;x,y)\,dy,$$

---

[1] Die Glieder der Reihen (117.) und (118.) sind dem absoluten Betrage nach entsprechend kleiner als die Glieder einer gewissen konvergenten numerischen Reihe.

erstreckt über irgendeine geschlossene, mit allen ihren Punkten dem Gebiete $K_0$ angehörende rektifizierbare Kurve $\bar{S}$, hat den Wert Null. Denn die Integrabilitätsbedingung

$$(126.)\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(b_k(x,y)\,\frac{\partial}{\partial y}\,\mathfrak{G}_k(\bar{x},\bar{y};x,y)\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(a_k(x,y)\,\frac{\partial}{\partial x}\,\mathfrak{G}_k(\bar{x},\bar{y};x,y)\right)=0$$

ist offenbar erfüllt.

Beachtet man die Beziehungen (104.), (109.), (120.), (122.) und (123.), so erhält man nunmehr die Gleichung

$$(127.)\quad \int_{\bar{S}} -b(x,y)\,\frac{\partial}{\partial y}\,\mathfrak{G}(\bar{x},\bar{y};x,y)\,dx+a(x,y)\,\frac{\partial}{\partial x}\,\mathfrak{G}(\bar{x},y;x,y)\,dy=0\,.$$

Hiermit ist aber auch gleichzeitig bewiesen, daß jedes hinreichend kleine, im wesentlichen stetig gekrümmte, von Singularitäten freie Flächenstück zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich auf einen Teil einer Ebene abgebildet werden kann.

## § 3.

Um die stellenweise etwas umständlichen Berechnungen übersichtlicher zu gestalten, ist bei allen bisherigen Betrachtungen vorausgesetzt worden, daß die Größe $F$ gleich 0 ist, d. h. daß die Kurvenscharen auf der Fläche, welche entsprechend durch die Beziehung $x=$ konst. und die Beziehung $y=$ konst. charakterisiert sind, zwei orthogonale Kurvenscharen darstellen.

Der allgemeine Fall erledigt sich in ganz ähnlicher Weise. In den folgenden Zeilen soll auf die wichtigsten hierbei eintretenden Modifikationen kurz hingewiesen werden.

Es seien $a(x,y)$, $b(x,y)$ und $d(x,y)$ reelle eindeutige Funktionen, welche stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben und der Beziehung $a(x,y)\,b(x,y)-d^2(x,y)>0$ genügen. Es sei $V(x,y)$ wie im § 1 des I. Kapitels eine stetige, der Hölderschen Bedingung genügende Funktion, $(x,y)$ ein Punkt im Innern des Gebietes $T$. Der Einfachheit halber sei $a(\xi,\eta)=\alpha$, $b(\xi,\eta)=\beta$, $d(\xi,\eta)=\delta$, $a(\bar{x},\bar{y})=\bar{a}$, $b(\bar{x},\bar{y})=\bar{b}$, $d(\bar{x},\bar{y})=\bar{d}$ gesetzt. Das Integral

$$J'(x,y)=\iint_T \log\left\{\beta(\xi-x)^2-2\delta(\xi-x)(\eta-y)+\alpha(\eta-y)^2\right\}\cdot V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

hat stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Es ist ferner

$$a\frac{\partial^2 J'}{\partial x^2}+2d\frac{\partial^2 J'}{\partial x\,\partial y}+b\frac{\partial^2 J'}{\partial y^2}=4\pi\sqrt{a\,b-d^2}\,V(x,y)+\iint\limits_T K'(x,y;\xi,\eta)\,V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

$$K'(x,y;\xi,\eta)=\left(a\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2d\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+b\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\log\left\{\beta(\xi-x)^2-2\delta(\xi-x)(\eta\quad y)+\alpha(\eta-y)^2\right\}.$$

Dieser Hilfssatz stellt eine Verallgemeinerung des zu Anfang des I. Kapitels bewiesenen Hilfssatzes dar.

Für den im § 6 des I. Kapitels bewiesenen Satz tritt jetzt der folgende allgemeinere Satz ein.

Es sei $W(\xi,\eta)$ eine beliebige reelle eindeutige und stetige Funktion ihrer beiden Argumente. Die Integrale

$$K'(x,y)=\iint\limits_T\frac{\partial}{\partial x}\log\left\{\beta(\xi-x)^2-2\delta(\xi-x)(\eta-y)+\alpha(\eta-y)^2\right\}\cdot W(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

und

$$L'(x,y)=\iint\limits_T K'(x,y;\xi,\eta)\,W(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

genügen der Hölderschen Bedingung.

Die partielle Differentialgleichung (73.) ist jetzt durch die allgemeinere partielle Differentialgleichung

$$(73^*.)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F\frac{\partial u}{\partial y}-G\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{E\,G-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F\frac{\partial u}{\partial x}-E\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{E\,G-F^2}}\right)=0$$

zu ersetzen. Setzt man zur Vereinfachung

$$\frac{G}{\sqrt{E\,G-F^2}}=a,\quad \frac{E}{\sqrt{E\,G-F^2}}=b,\quad -\frac{F}{\sqrt{E\,G-F^2}}=d,$$

so erhält man die partielle Differentialgleichung

$$(74^*.)\quad L'(u)\equiv a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2d\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial d}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial d}{\partial x}\right)=0.$$

Hierbei ist

$$a\,b-d^2=1.$$

Wie im II. Kapitel wird jetzt zunächst die zusätzliche Annahme gemacht, daß die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial a}{\partial x},\ \frac{\partial a}{\partial y},\ \frac{\partial d}{\partial x},\ \frac{\partial d}{\partial y},\ \frac{\partial b}{\partial x},\ \frac{\partial b}{\partial y}$$

der Hölderschen Bedingung genügen. Es wird alsdann

$$(76^*.)\quad \begin{aligned} u'(x,y) \equiv \mathfrak{G}'(\bar{x},\bar{y};x,y) &= \log\left\{b(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x})^2 - 2d(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x})(y-\bar{y}) + a(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y})^2\right\} + \\ &+ \iint_T \log\left\{b(\xi,\eta)(\xi-x)^2 - 2d(\xi,\eta)(\xi-x)(\eta-y) + a(\xi,\eta)(\eta-y)^2\right\}\cdot V'(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \end{aligned}$$

gesetzt. Zur Bestimmung der Funktion $V'(x,y)$ ergibt sich die lineare Integralgleichung

$$(79^*.)\quad \begin{aligned} 4\pi V'(x,y) + \iint_T L'\left[\log\left\{\beta(\xi-x)^2 - 2\delta(\xi-x)(\eta-y) + \alpha(\eta-y)^2\right\}\right] V'(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\ = -L'\left[\log\left\{\bar{b}(x-\bar{x})^2 - 2\bar{d}(x-\bar{x})(y-\bar{y}) + a(y-y)^2\right\}\right] = 4\pi f'(x,y). \end{aligned}$$

In seiner auf der Seite 7 zitierten Abhandlung beschäftigt sich Hr. E. E. Levi mit der Bestimmung einer Grundlösung der linearen partiellen Differentialgleichung $2p$ ter Ordnung des total elliptischen Typus. Sein Verfahren ist dem im obigen auseinandergesetzten sehr ähnlich. In dem speziellen Falle der Differentialgleichung (74*.) läßt sich der Ansatz des Hrn. E. E. Levi durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}''(\bar{x},\bar{y};x,y) = &-\frac{a}{[ab-d^2]^{\frac{1}{2}}}\log\left\{\frac{b}{a}(x-\bar{x})^2 - \frac{2d}{a}(x-\bar{x})(y-\bar{y}) + (y-\bar{y})^2\right\} - \\ &-\iint_T \frac{a}{[ab-d^2]^{\frac{1}{2}}}\log\left\{\frac{b}{a}(x-\xi)^2 - \frac{2d}{a}(x-\xi)(y-\eta) + (y-\eta)^2\right\}\cdot V''(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \end{aligned}$$

wiedergeben. Bei der Durchführung der Rechnung ergibt sich hierbei die Notwendigkeit, die Existenz der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der Größen $a$, $b$ und $d$ anzunehmen. Von diesen partiellen Ableitungen muß überdies vorausgesetzt werden, daß sie der Hölderschen Bedingung oder einer allgemeineren Bedingung des Hrn. Dini genügen.

Hr. Hilbert geht bei der Bildung der »Parametrix« von einem Ausdrucke aus, der im wesentlichen die Form

$$\log\left\{\beta(x-\xi)^2 - 2\delta(x-\xi)(y-\eta) + \alpha(y-\eta)^2\right\} + \log\left\{b(x-\xi)^2 - 2d(x-\xi)(y-\eta) + a(y-\eta)^2\right\}$$

hat (vgl. D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, sechste Mitteilung, S. 15, sowie den Bericht über einen von Hrn. Hilbert in der Mathematischen Gesellschaft zu Göttingen gehaltenen Vortrag, Jahresberichte d. D. Math. Ver., Bd. 16 [1907], S. 77—78).

Der soeben betrachtete logarithmische Ausdruck stellt, wenn die Größen $a$, $b$ und $d$ Konstanten sind, eine Lösung der partiellen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2d\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

dar (vgl. Somigliana, Sui sistemi simmetrici di equazioni a derivate parziali, Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, t. XXII [1894], S. 143—156).

Für die Funktion (93.) tritt im allgemeineren Falle die Funktion

$$(93^*.)\quad v'(x,y)=\int_{(x',y')}-\left(d(x,y)\frac{\partial\mathfrak{G}'}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial\mathfrak{G}'}{\partial y}\right)dx+\left(a(x,y)\frac{\partial\mathfrak{G}'}{\partial x}+d(x,y)\frac{\partial\mathfrak{G}'}{\partial y}\right)dy$$

ein. Die Differentialgleichungen (94.) sind durch die Differentialgleichungen

$$(94^*.)\qquad \frac{\partial v'}{\partial x}=-d\frac{\partial u'}{\partial x}-b\frac{\partial u'}{\partial y},\qquad \frac{\partial v'}{\partial y}=a\frac{\partial u'}{\partial x}+d\frac{\partial u'}{\partial y}$$

zu ersetzen.

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01298 8994